PROBABILISTYKA
dla inżynierów

Tadeusz Szopa

CELE PREZENTACJI

- Przedstawienie podstaw wybranych zagadnień probabilistyki, użytecznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych, zwłaszcza inżynierskich

- Wykształcenie nawyku probabilistycznego myślenia

ZAGADNIENIA

1. Problem niepewności w działalności inżynierskiej
2. Podstawowe pojęcia probabilistyki
3. Zmienne losowe ciągłe
4. Zmienne losowe dyskretne (skokowe)
5. Zdarzenia losowe
6. Elementy statystyki matematycznej
7. Informacja o procesach stochastycznych

PROBLEM NIEPEWNOŚCI W DZIAŁALNOŚCI INŻYNIERSKIEJ

Niepewność wyników rozumowania i trafności decyzji, a także obliczeń inżynierskich

- **Niedoskonałość człowieka**

\+

- Ograniczona wiedza

○ Niemożliwość jednoznacznego przewidzenia skutków podejmowanych decyzji

○ Nierozpoznanie niektórych czynników, w szczególności – ważnych, mających wpływ na rezultaty działań inżyniera

Niedoskonałość człowieka
Ograniczona wiedza

Losowość pojawiania się i przebiegu zjawisk
i zdarzeń niepożądanych prowadzących do strat

Problemy bezpieczeństwa
Nauka o bezpieczeństwie
Pojęcie ryzyka

Niedoskonałość człowieka
Ograniczona wiedza

Losowość pojawiania się i przebiegu zjawisk
i zdarzeń niepożądanych prowadzących do strat

Problemy bezpieczeństwa
Nauka o bezpieczeństwie
Pojęcie ryzyka

Przypadek rządzi połową naszych działań, a my kierujemy resztą

Niccolò Machiavelli (1469-1527)

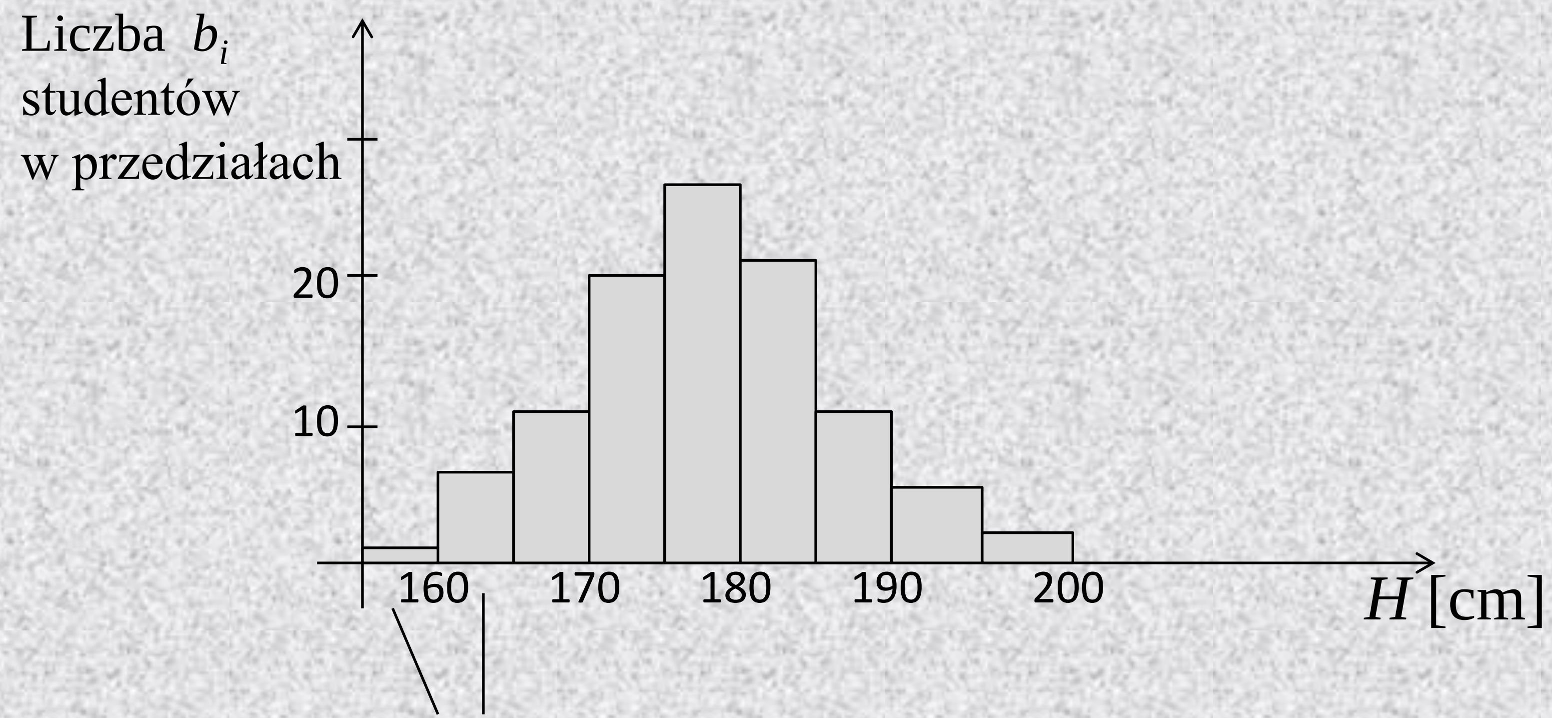
- **Świadomość losowości**
  - zdarzeń, procesów, zjawisk, właściwości

- **Uwzględnianie losowości :**
  - w opisach (wyobrażeniu) rzeczywistości, w tym – w opisach matematycznych, czyli modelach rzeczywistości

PODSTAWOWE POJĘCIA PROBABILISTYKI

Przykład

Wzrost ***H*** studentów na kierunku LiK (PW)

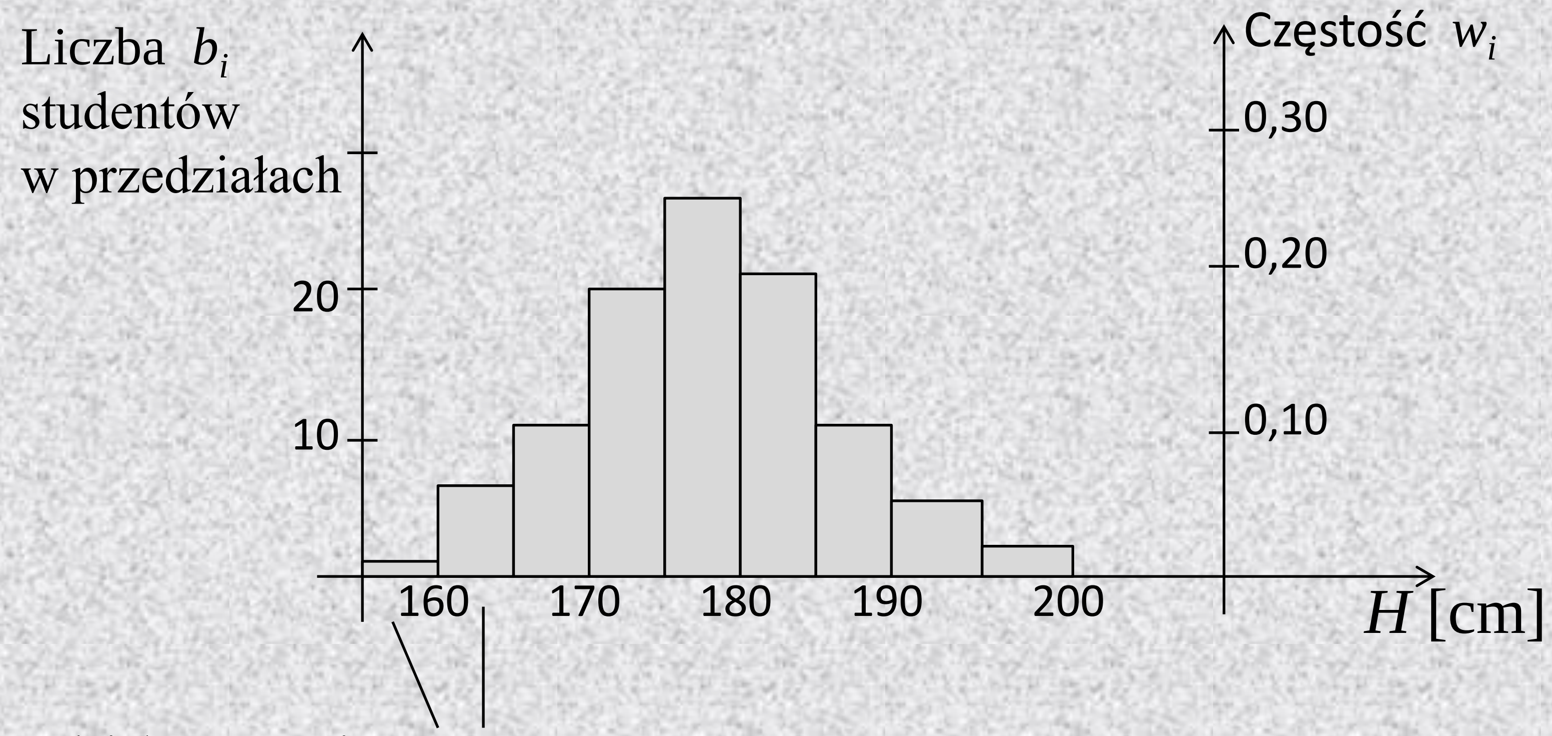


Przedziały wartości H: 1, 2, … , i , …

PODSTAWOWE POJĘCIA PROBABILISTYKI

Przykład

Wzrost ***H*** studentów na kierunku LiK (PW)



Przedziały wartości H: 1, 2, … , i , …

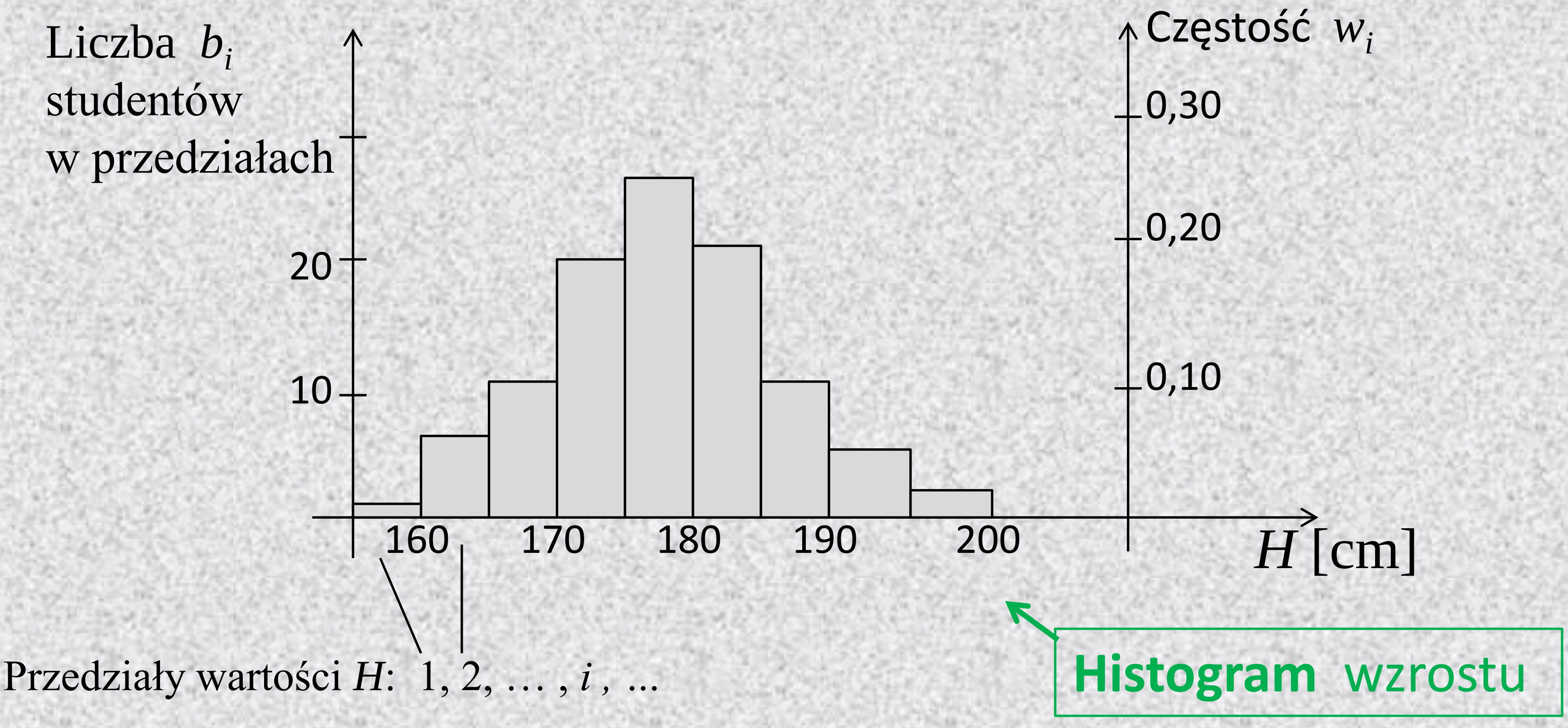
$$w_i = \frac{b_i}{N}$$

Częstość można traktować jako statystyczny odpowiednik pojęcia **prawdopodobieństwa**

PODSTAWOWE POJĘCIA PROBABILISTYKI

Przykład

Wzrost ***H*** studentów na kierunku LiK (PW)

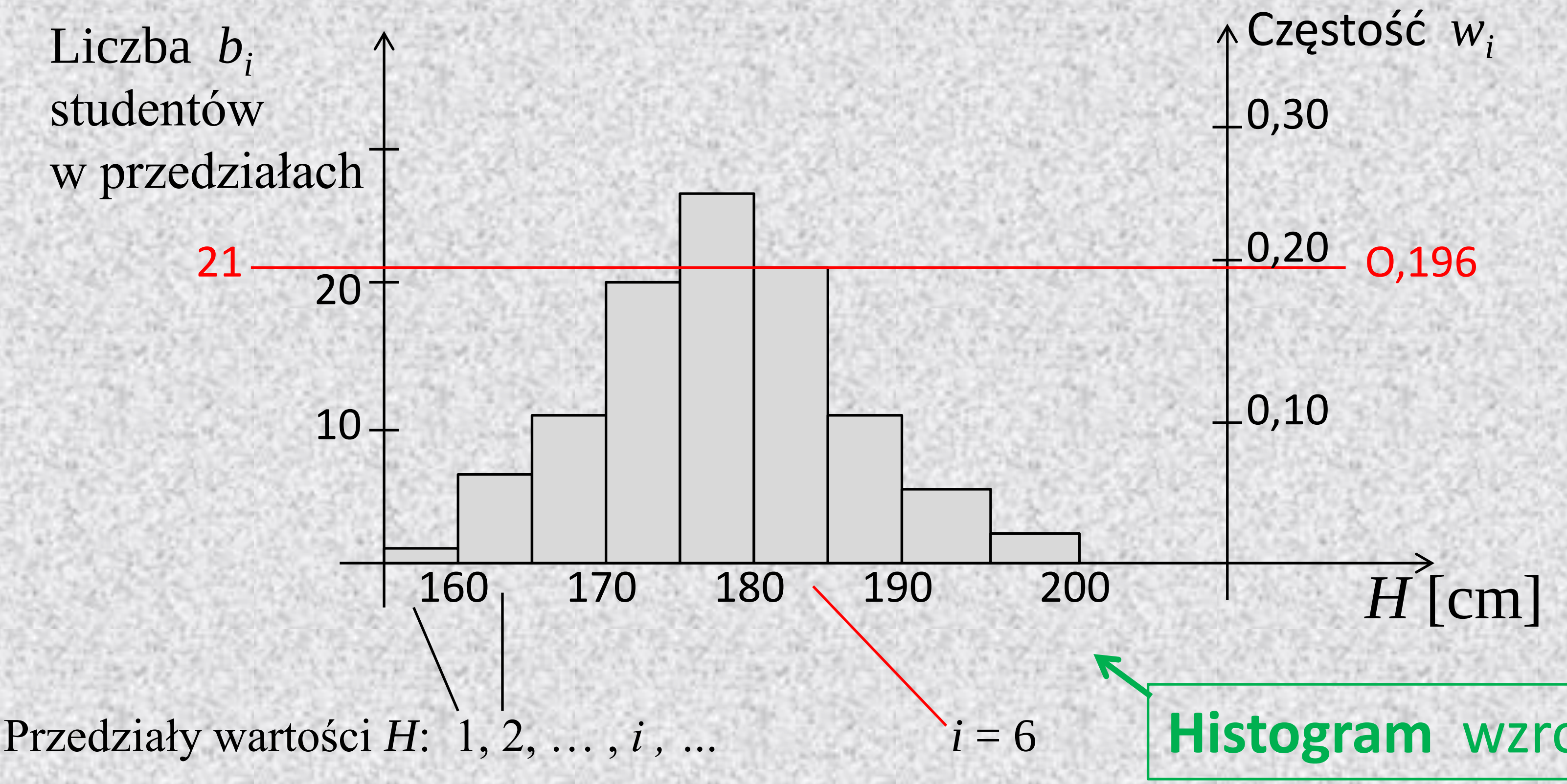


$$w_i = \frac{b_i}{N}$$

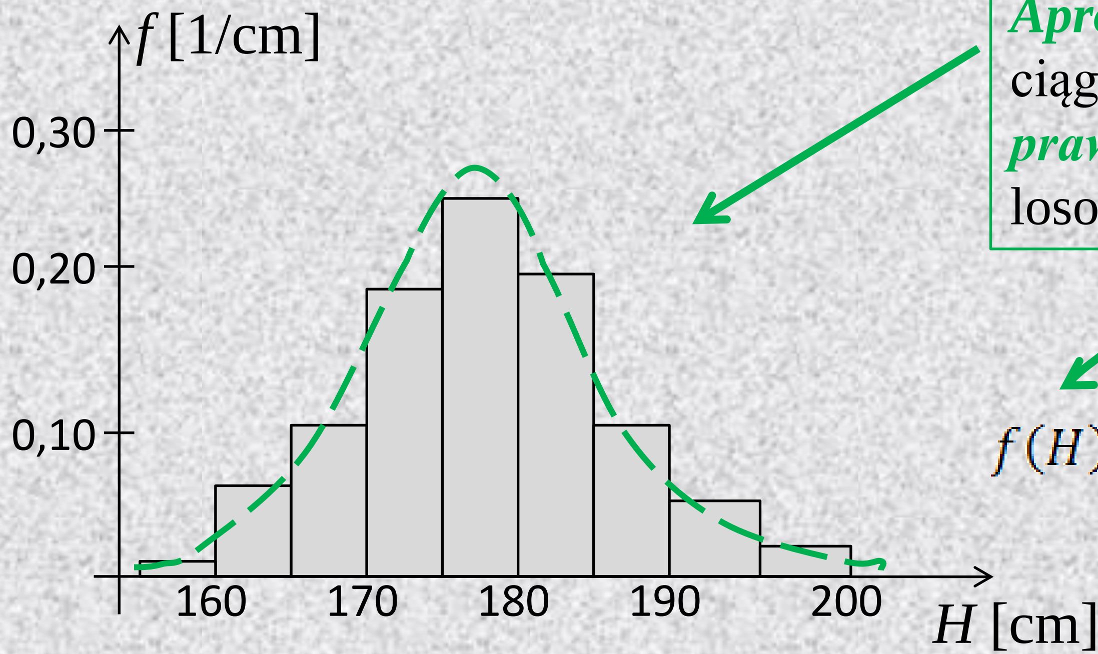
PODSTAWOWE POJĘCIA PROBABILISTYKI

Przykład

Wzrost ***H*** studentów na kierunku LiK (PW)



$$w_i = \frac{b_i}{N} \implies w_6 = \frac{b_6}{N} = \frac{21}{107} = 0{,}196$$



Aproksymacja histogramu krzywą ciągłą. Krzywa ta obrazuje ***gęstość prawdopodobieństwa*** zmiennej losowej

$$f(H) = \lim_{\Delta H \to \infty} \frac{P\{H < \boldsymbol{H} < H + \Delta H\}}{\Delta H}$$

f → rozkład prawdopodobieństwa występowania wartości **zmiennej losowej** (ciągłej)

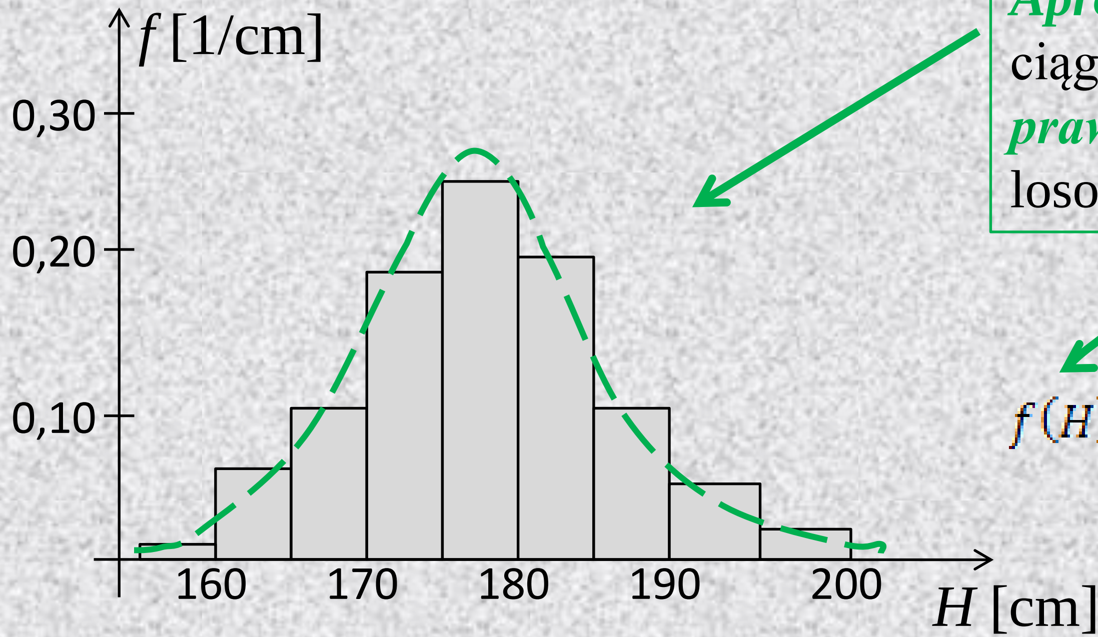
Pojęcie prawdopodobieństwa i zmiennej losowej

Prawdopodobieństwo – wielkość matematyczna będąca miarą możliwości wystąpienia określonego zdarzenia losowego.
Przybiera wartości z przedziału [0,1].
Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego – 0.

Zdarzenie losowe – zdarzenie, którego wyniku (skutku) człowiek nie jest w stanie jednoznacznie przewidzieć.
Przykład zdarzenia losowego – znalezienie się wzrostu studenta wyczytanego z listy w przedziale $180 < H \leq 185$ [cm].

Zmienna losowa – wielkość, która przybiera wartości z określonego przedziału w sposób losowy, czyli wartości niemożliwe do jednoznacznego przewidzenia przez człowieka.
Przykład zmiennej losowej – wzrost $\boldsymbol{H}$ studenta.
Zmienne losowe ciągłe i zmienne losowe skokowe (dyskretne).

ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE



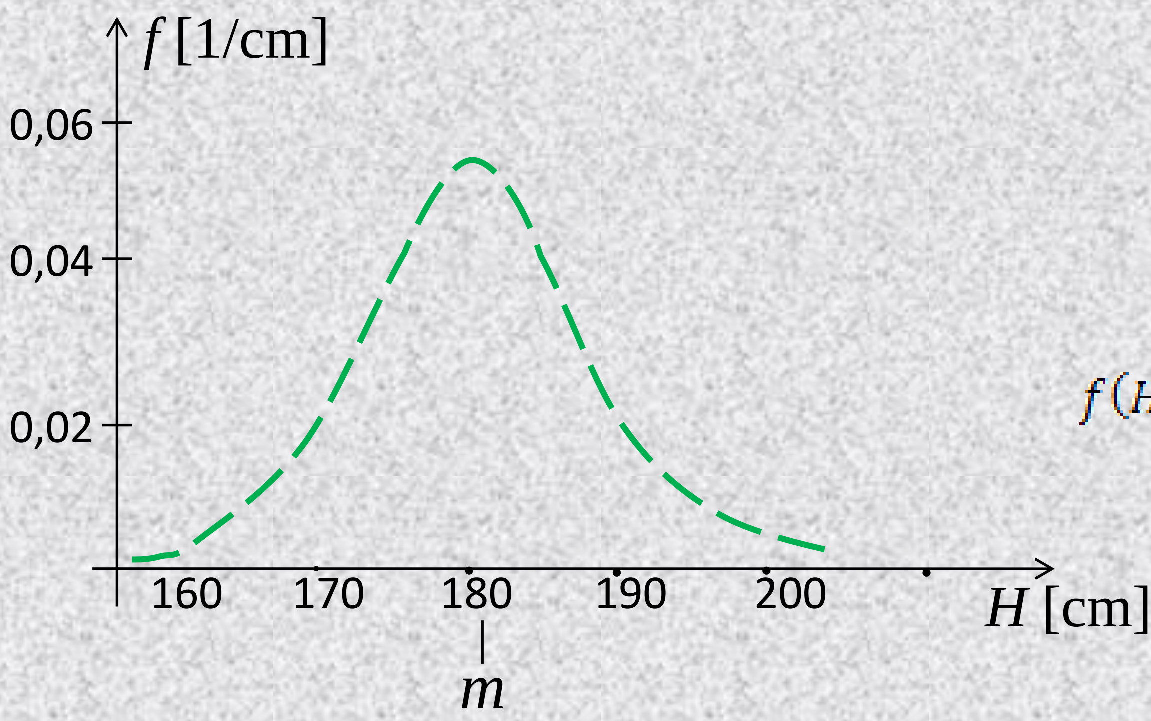
Aproksymacja histogramu krzywą ciągłą. Krzywa ta obrazuje ***gęstość prawdopodobieństwa*** zmiennej losowej

$$f(H) = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{P\{H < \mathbf{H} \leq H + \Delta H\}}{\Delta H}$$

H **,** ***L***$_{\boldsymbol{cpeak}}$ **,** ***R***$_{\boldsymbol{e}}$ **,** ***R***$_{\boldsymbol{m}}$ **,** ***Z*** **, czas życia człowieka , trwałość urządzenia, czas do wystąpienia uszkodzenia**, … – ***zmienne losowe ciągłe***

Liczba wypadków, liczba poszkodowanych, liczba uszkodzeń, … – ***zmienne losowe dyskretne***

Rozkład normalny zmiennej losowej ***x***



$$f(H) = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{P\{H < \boldsymbol{H} \le H + \Delta H\}}{\Delta H}$$

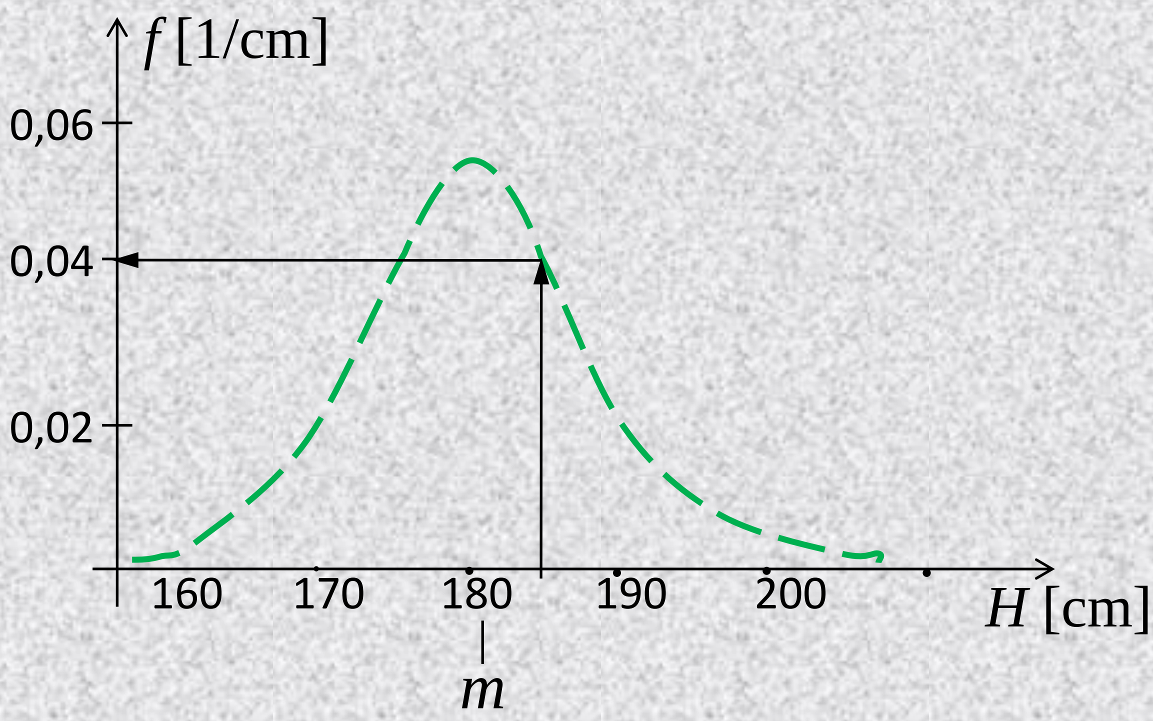
Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej ***x*** o *rozkładzie normalnym (Gaussa)* (np. ***H*** , $\boldsymbol{R_m}$, ***Z*** , **czasu życia człowieka**, …)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$-\infty < x < \infty$$

m i σ – *wartość oczekiwana* i *odchylenie standardowe* zmiennej losowej ***x***

Rozkład normalny zmiennej losowej ***x***



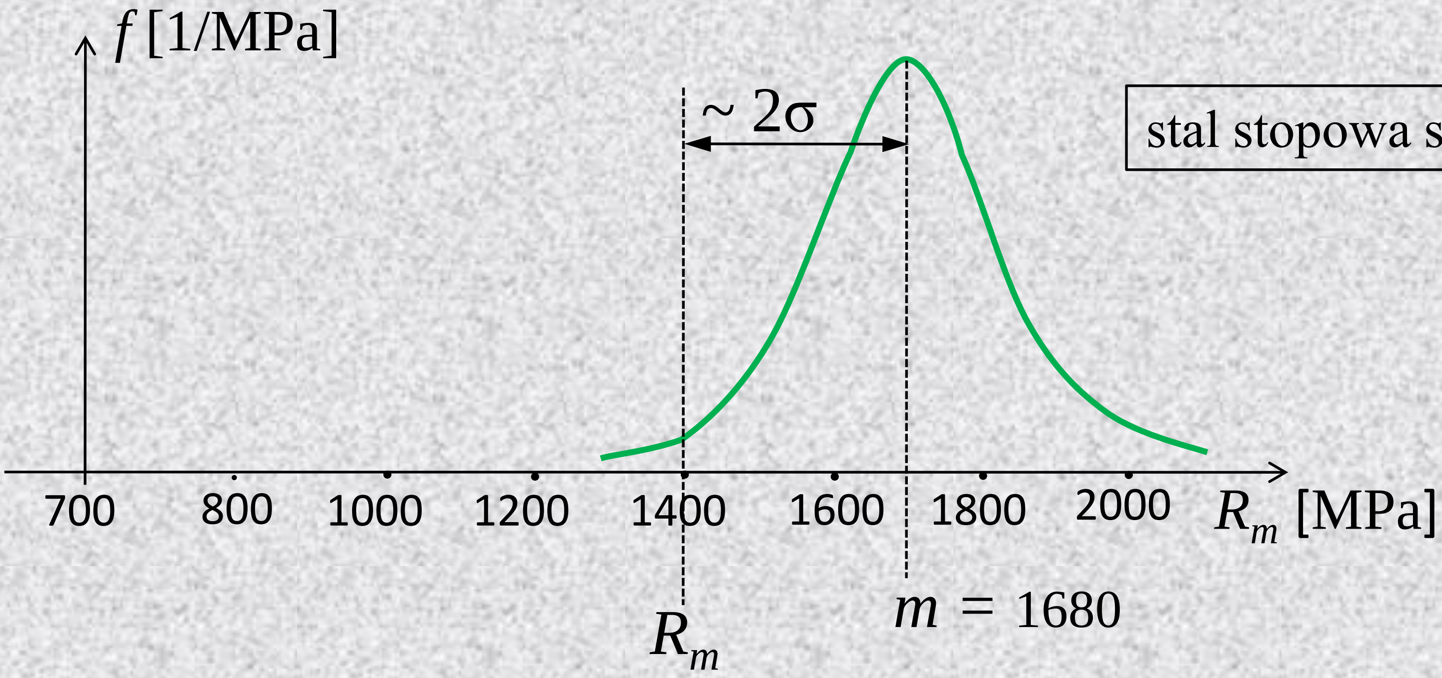
Np. $f\,(185) = 0{,}04$

$$f(H) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(H-m)^2}{2\sigma^2}}$$

m i σ – *wartość oczekiwana* i *odchylenie standardowe* zmiennej losowej $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{H}$

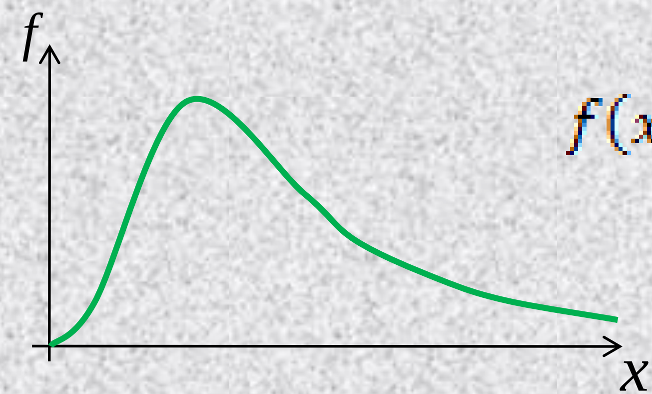
Przykład

Rozkład prawdopodobieństwa granicy wytrzymałości doraźnej



Inne typowe rozkłady zmiennych losowych ciągłych

Rozkład logarytmiczno-normalny zmiennej losowej ***x***



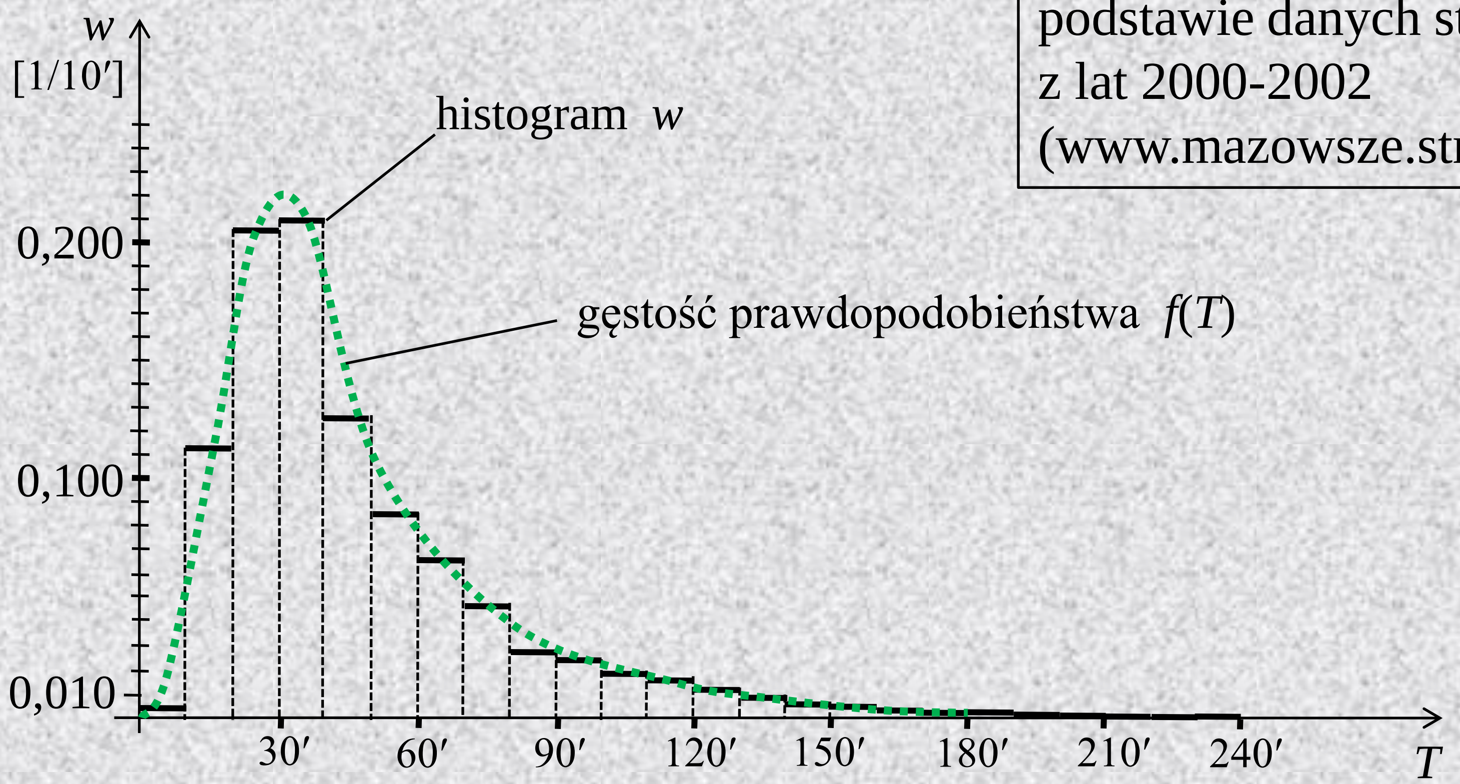
$$f(x) = \frac{\log e}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x > 0$$

m i σ – wartość oczekiwana (średnia) i odchylenie standardowe zmiennej losowej ***z*** = **log *x***

Przykład

Czas ***T*** trwania akcji ratowniczej w Warszawie jest opisany rozkładem logarytmiczno-normalnym o gęstości prawdopodobieństwa

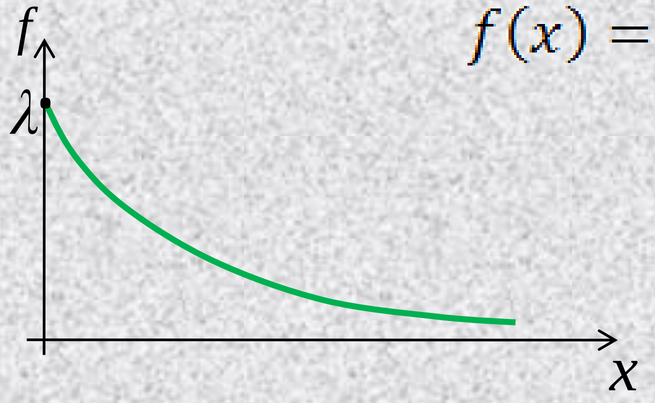
$$f(T) = \frac{0{,}4343}{\sigma T\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log T - m)^2}{2\sigma^2}}$$



Wykresy sporządzone na podstawie danych statystycznych z lat 2000-2002 (www.mazowsze.straz.pl)

Wykres gęstości prawdopodobieństwa czasu ***T*** trwania akcji ratowniczej w Warszawie (zmienna losowa ***T*** o rozkładzie logarytmiczno-normalnym)

Rozkład wykładniczy zmiennej losowej ***x***



$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \qquad x > 0 \text{ i } \lambda > 0$$

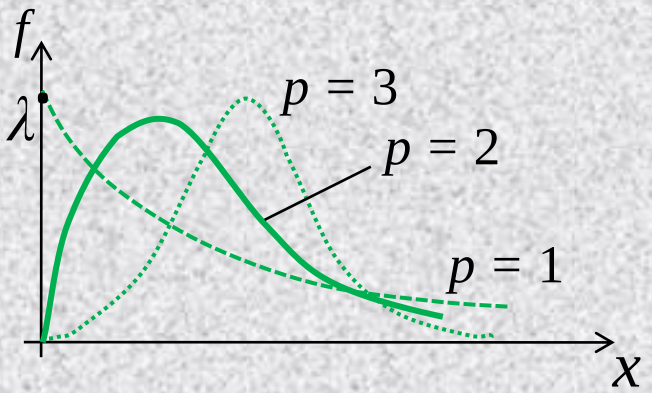
Przykład: czas ***T*** między zdarzeniami niepożądanymi (niesprawnościami, uszkodzeniami) w obiektach niestarzejących się, np. w urządzeniach elektronicznych i elektrycznych

Przykład

Czas ***T*** między kolejnymi zgłoszeniami zdarzeń do pojedynczej jednostki ratowniczo-gaśniczej w Warszawie jest opisany rozkładem wykładniczym o intensywności zgłoszeń

$\lambda \approx 90 \cdot 10^{-3}$ [1/h] (na podstawie danych z lat 2000-2002)

Rozkład Weibulla zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$



$$f(x) = p\lambda x^{p-1} e^{-\lambda x^{p}}$$

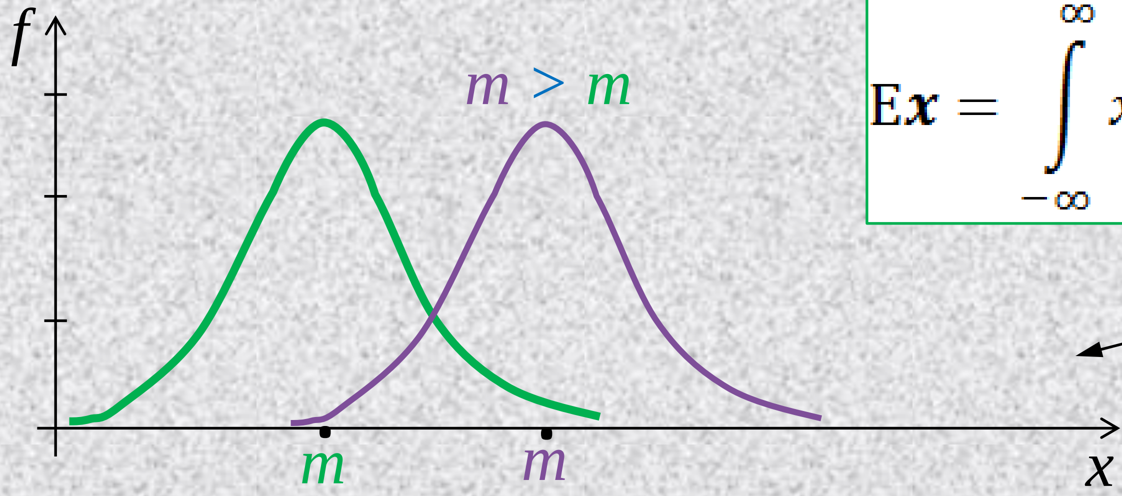
$x > 0$ oraz $p > 0$ i $\lambda > 0$

Przykład: gdy $p > 1$, czas $\boldsymbol{T}$ między zdarzeniami niepożądanymi w obiektach starzejących się (m.in. wskutek zmęczenia materiału)

Przykład

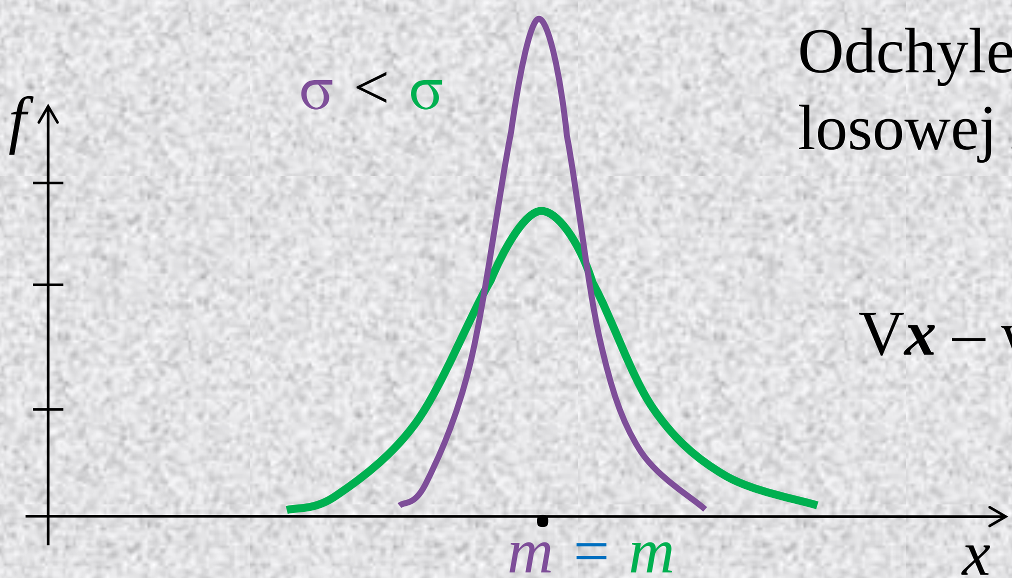
Rozkładem Weibulla jest opisywana trwałość łożyska tocznego. Np. w przypadku łożyska tocznego kulkowego $p = 9/8$,
a λ wyznacza się dla określonego rozmiaru łożyska, jego nośności dynamicznej, warunków jego pracy itd.

Parametry i inne cechy zmiennej losowej ciągłej



$$\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$\mathrm{E}\boldsymbol{x} \equiv m$

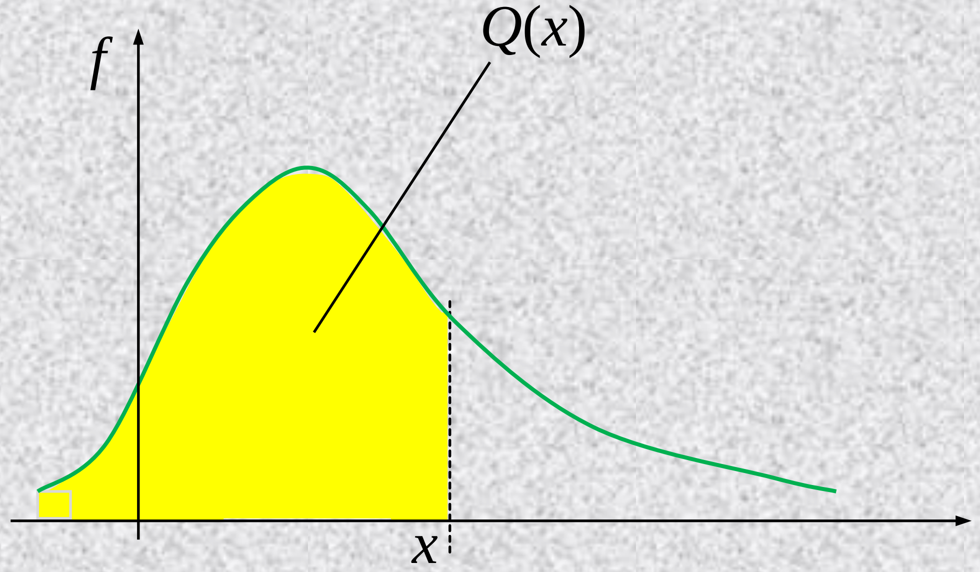


Odchylenie standardowe zmiennej losowej ***x***

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{x}}$$

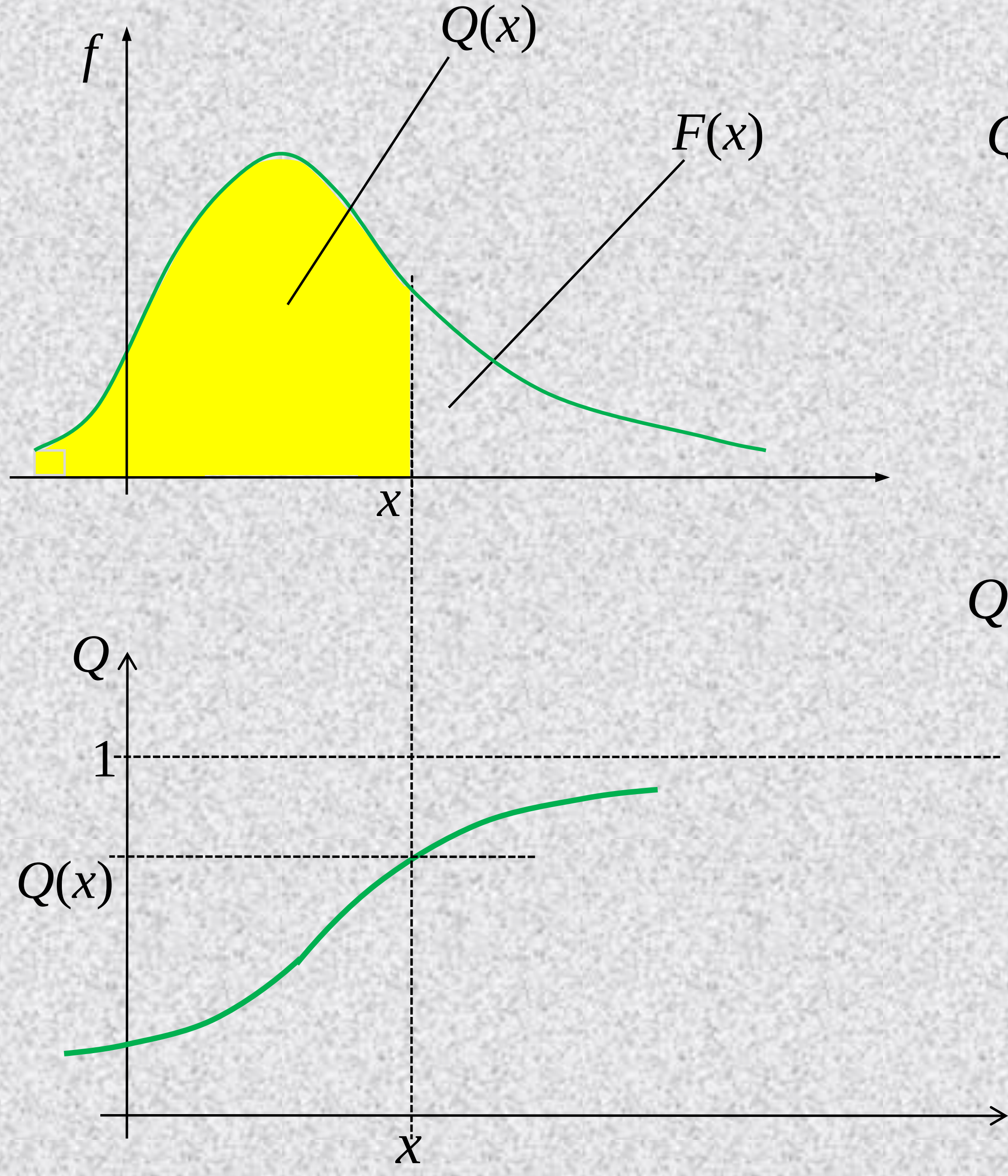
V***x*** – wariancja zmiennej losowej ***x***

$$\mathrm{V}\boldsymbol{x} = \mathrm{E}(\boldsymbol{x} - \mathrm{E}\boldsymbol{x})^2$$



$$Q(x) = P\{\boldsymbol{x} \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

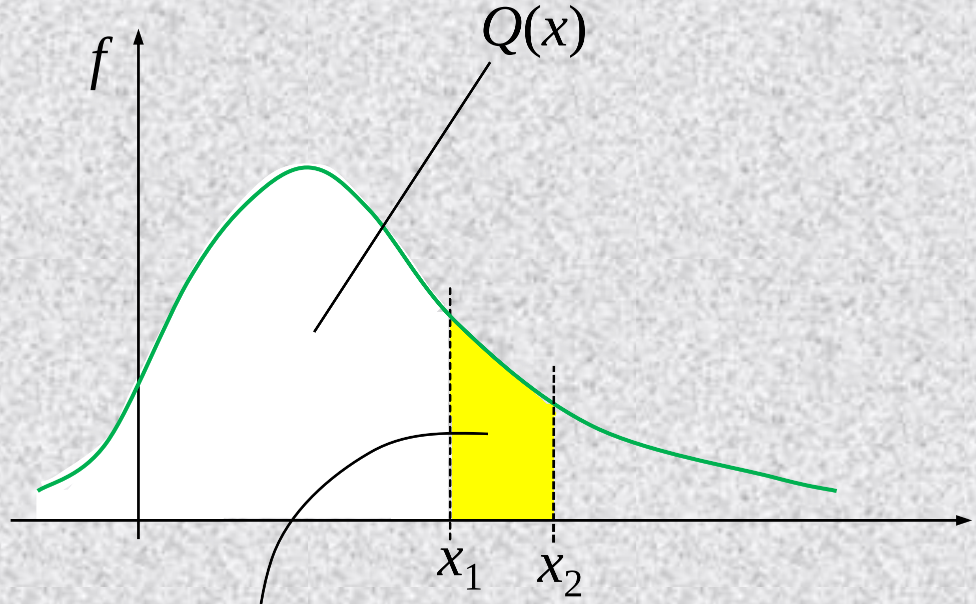
$Q(x)$ – dystrybuanta zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$



$$Q(x) = P\{\boldsymbol{x} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

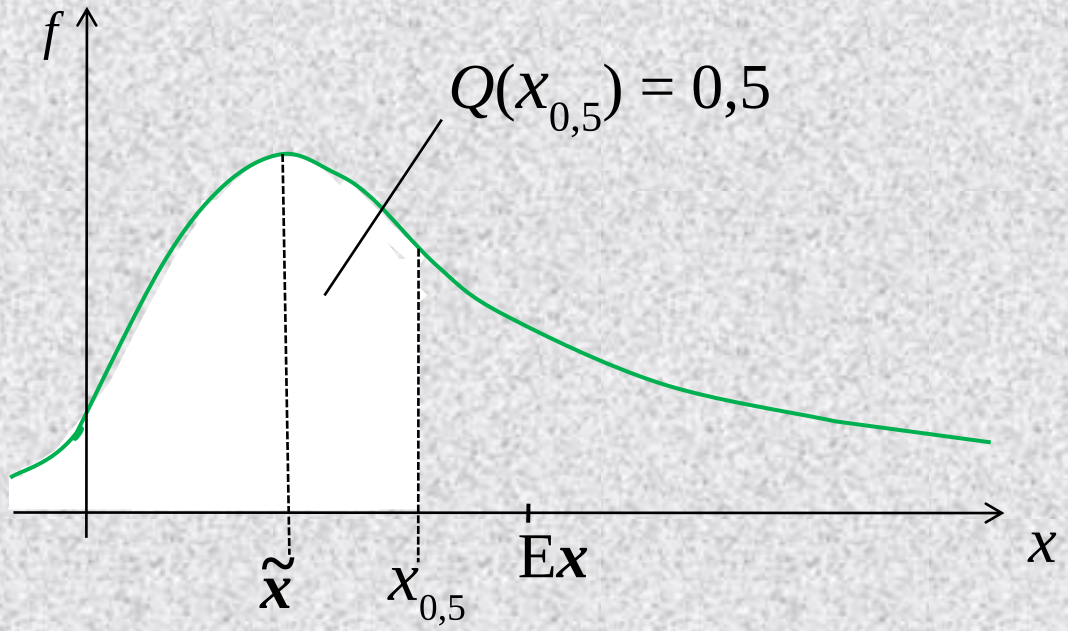
$Q(x)$ – dystrybuanta zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$

$$Q(x) + F(x) = 1$$



$$P\{x_1 < \mathbf{x} \le x_2\} = Q(x_2) - Q(x_1)$$

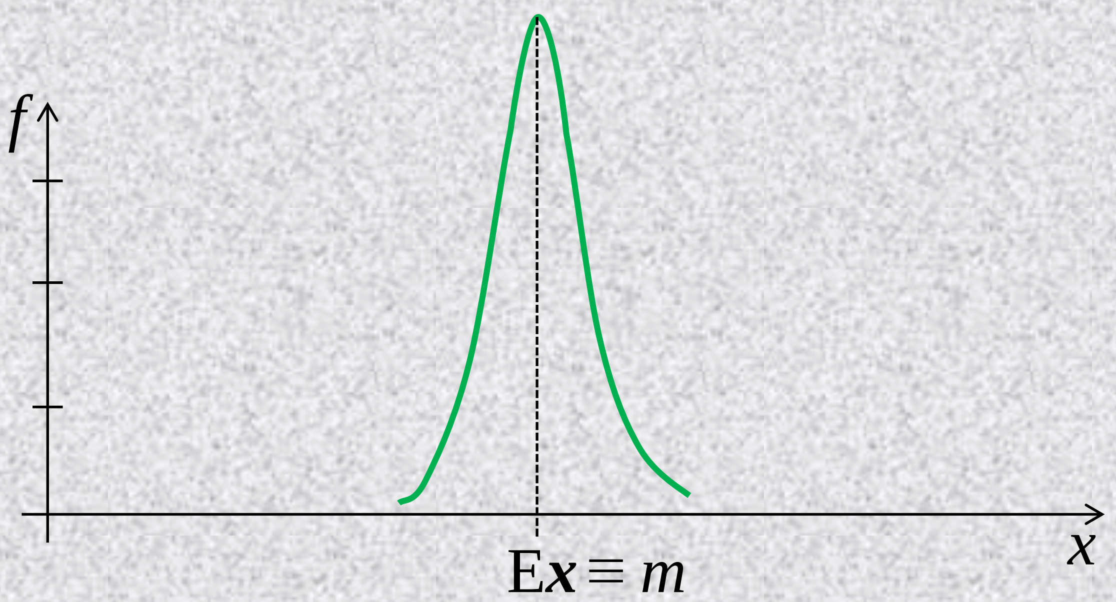
gdzie dystrybuanta $Q(x) = P\{\mathbf{x} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$



$Q(x_\alpha) = \alpha$

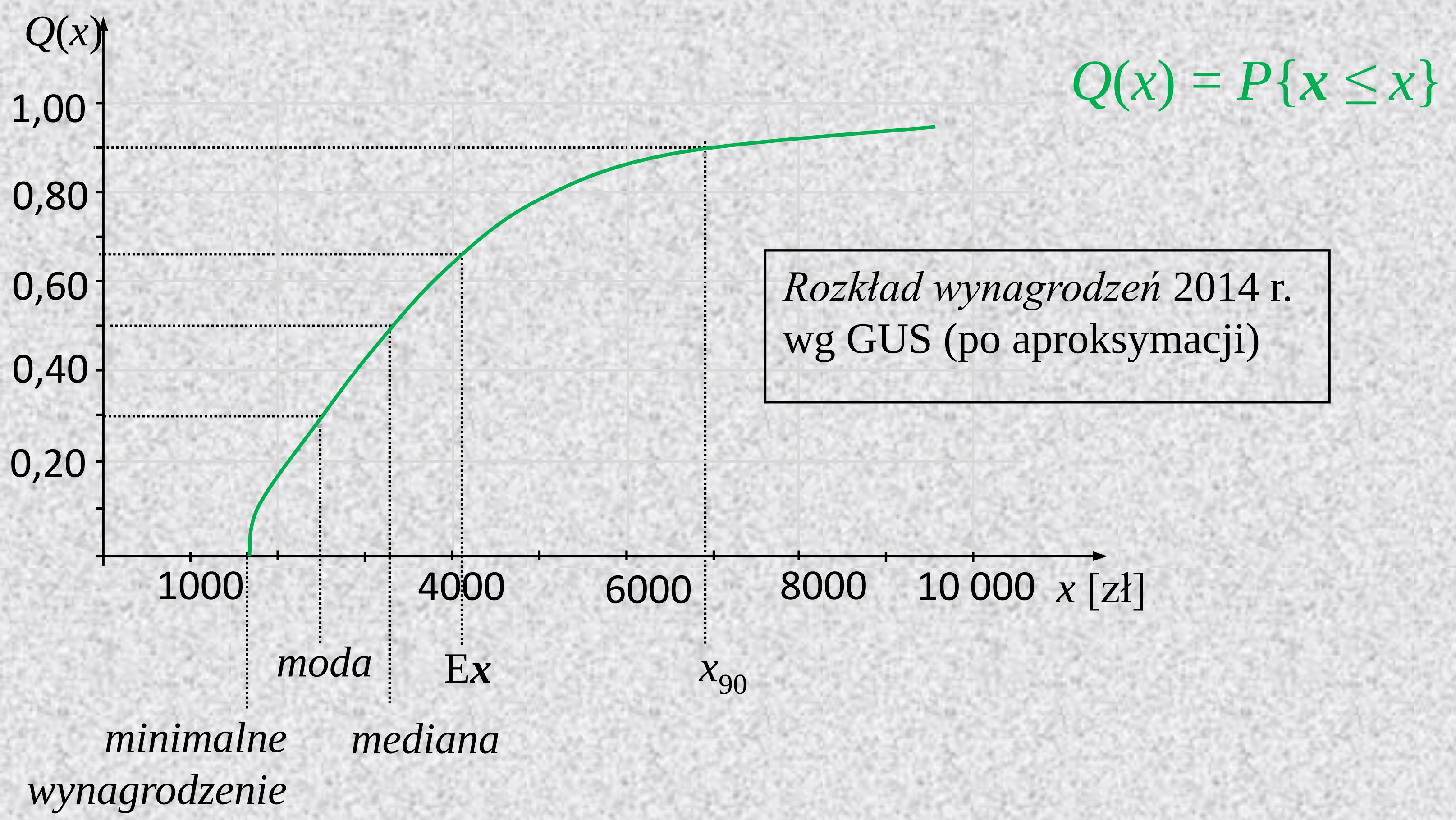
x_α – kwantyl rozkładu zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$ rzędu α

$x_{0,5}$ – mediana zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$,
$\tilde{\boldsymbol{x}}$ – moda (dominanta) zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$,
$\mathrm{E}\boldsymbol{x} \equiv m$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$



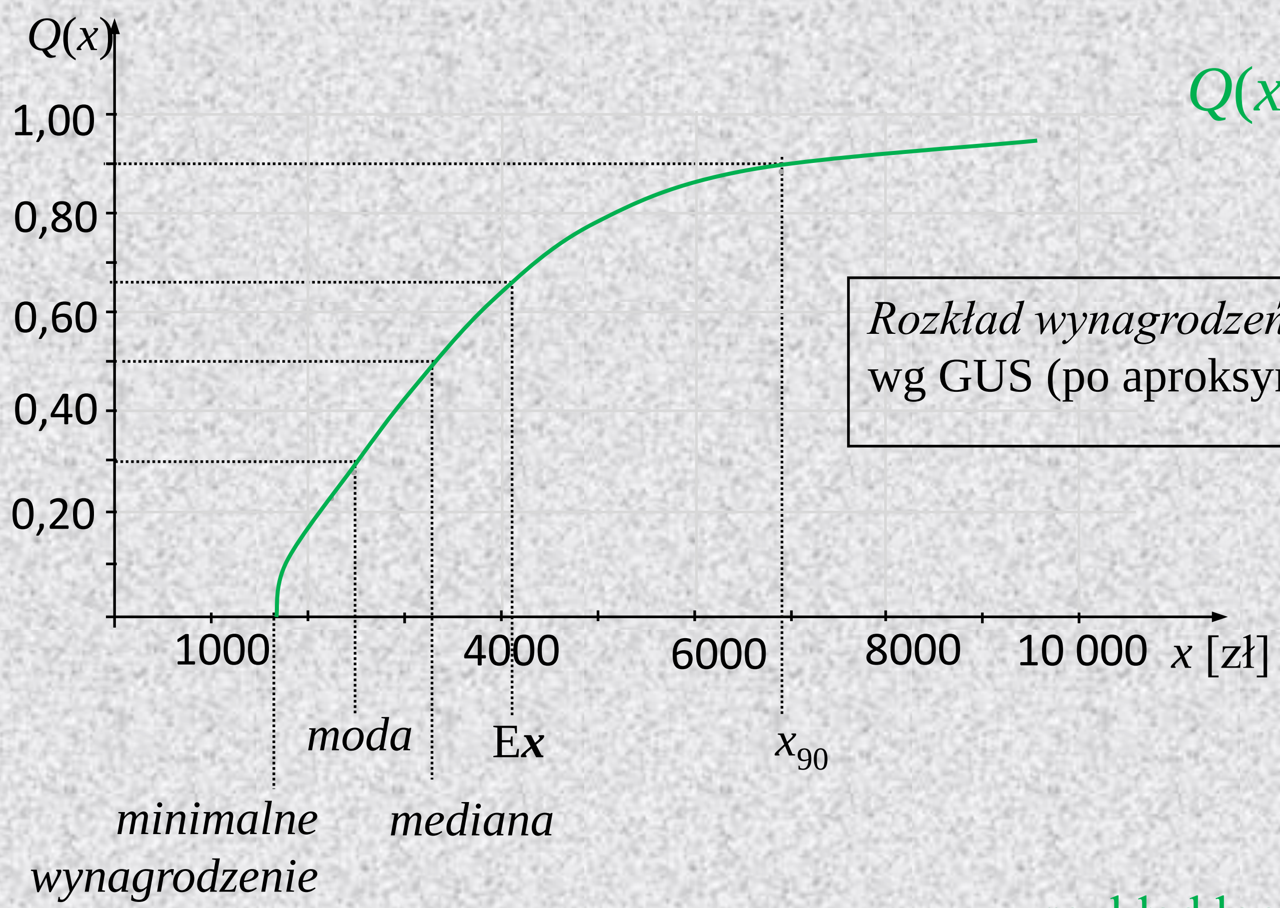
W przypadku rozkładu normalnego:

$$\mathrm{E}\boldsymbol{x} = x_{0,5} = \tilde{\boldsymbol{x}}$$



Q(x)
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
1000
4000
6000
8000
10 000
x [zł]
Q(x) = P{x ≤ x}
Rozkład wynagrodzeń 2014 r.
wg GUS (po aproksymacji)
moda
Ex
x90
minimalne
wynagrodzenie
mediana

$$Q(x) = P\{\mathbf{x} \le x\}$$



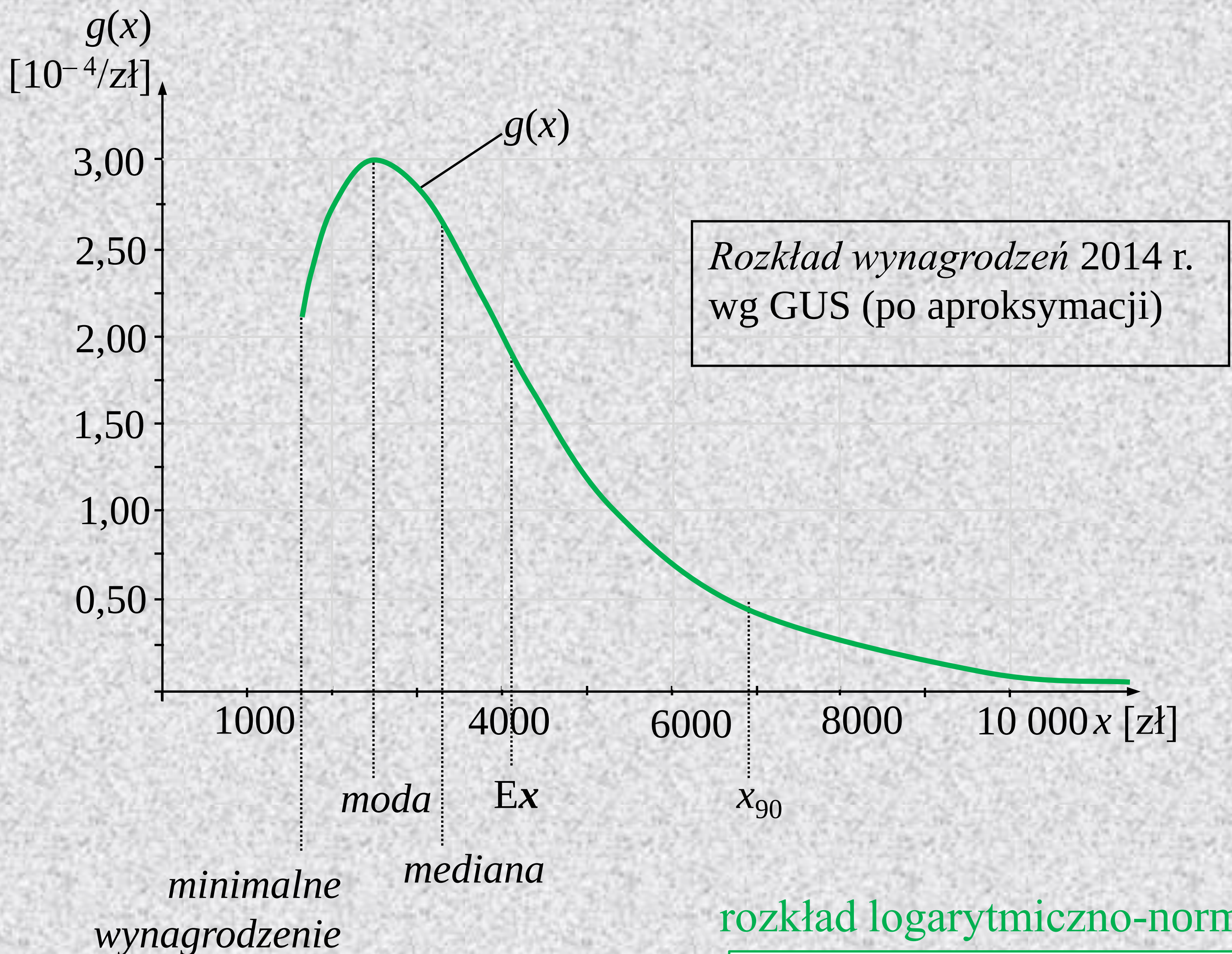
rozkład logarytmiczno-normalny

$$Q(x) = \Phi\left(\frac{\log x - m}{\sigma}\right)$$

$$m = \mathrm{E}\,\mathbf{log}\,\boldsymbol{x} = 3{,}52$$

$$\sigma \equiv \sigma_{\mathbf{log\,x}} = 0{,}22$$

m i σ – wartość oczekiwana (średnia) i odchylenie standardowe zmiennej losowej $\boldsymbol{z} = \mathbf{log}\,\boldsymbol{x}$



rozkład logarytmiczno-normalny

$$f(x) = \frac{0{,}4343}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}}$$

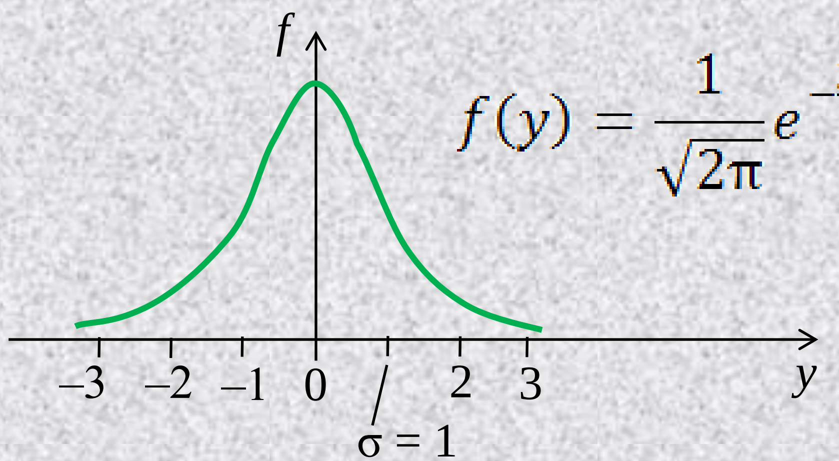
Standaryzacja zmiennej losowej

Jeśli zmienna losowa ***x*** ma rozkład normalny o parametrach *m* i σ, to zmienna losowa ***y***

$$\boxed{y = \frac{x - m}{\sigma}}$$

ma rozkład normalny o parametrach: E***y*** = 0, $\sigma_y = 1$.

y – zmienna losowa standaryzowana



$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Funkcja zmiennej losowej

$$\boxed{y = \varphi(x)}$$

x – zmienna o znanej gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ oraz parametrach Ex i σ

y – zmienna losowa o gęstości

argument funkcji f

$$\boxed{g(y) = f[\underbrace{x(y)}]\cdot\left|\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}\right|}$$

$x(y)$ – funkcja odwrotna względem funkcji φ

$$g(y) = f[x(y)] \cdot \left|\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

Przykład

y = 3***x*** + 2 $\longrightarrow$ $x(y) = \dfrac{y-2}{3}$; $\dfrac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{3}$

gęstość prawdopodobieństwa zmiennej ***y***

$$g(y) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$g(y) = f[x(y)] \cdot \left|\frac{dx(y)}{dy}\right|$$

Przykład

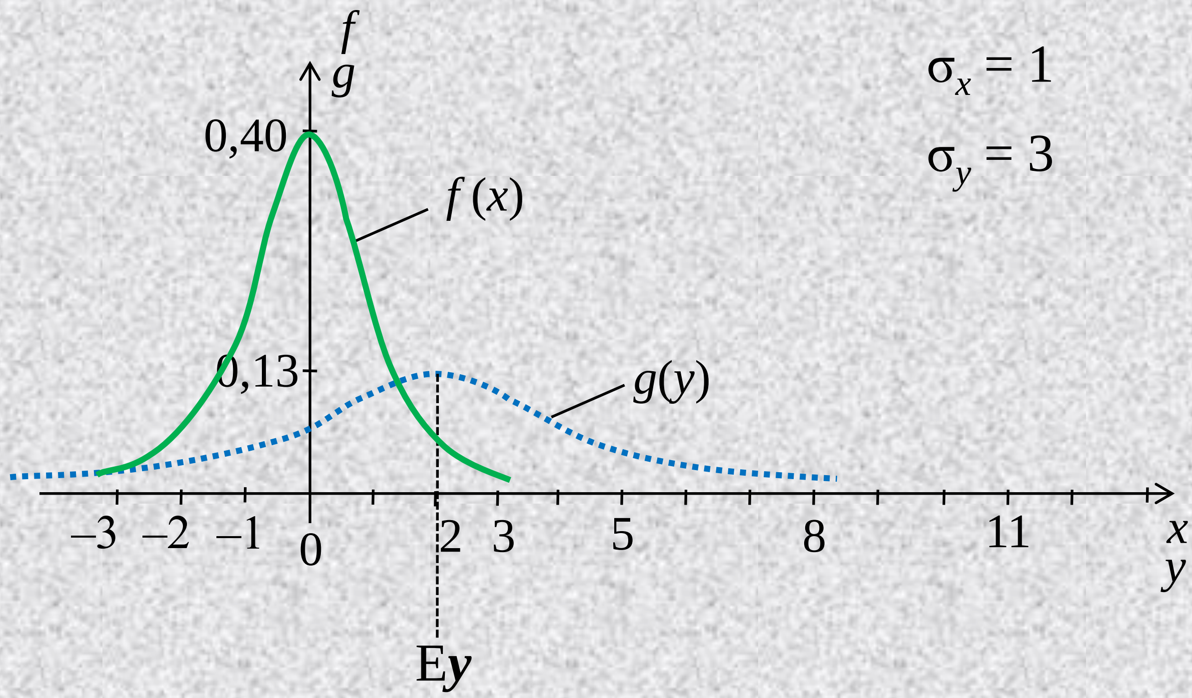
$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x} + 2$ $\longrightarrow$ $x(y) = \dfrac{y-2}{3}$; $\dfrac{dx(y)}{dy} = \dfrac{1}{3}$

gęstość prawdopodobieństwa zmiennej ***y***

$$g(y) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

Jeśli na przykład zmienna ***x*** ma rozkład normalny o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$, to $$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-2}{3}\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2\cdot 3^2}}$$



$\sigma_x = 1$

$\sigma_y = 3$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ g(y) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2\cdot 3^2}} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Właściwości parametrów zmiennych losowych

WŁAŚCIWOŚCI WARTOŚCI OCZEKIWANEJ

$\mathrm{E}c = c$

$\mathrm{E}(c\boldsymbol{x}) = c\mathrm{E}\boldsymbol{x}$

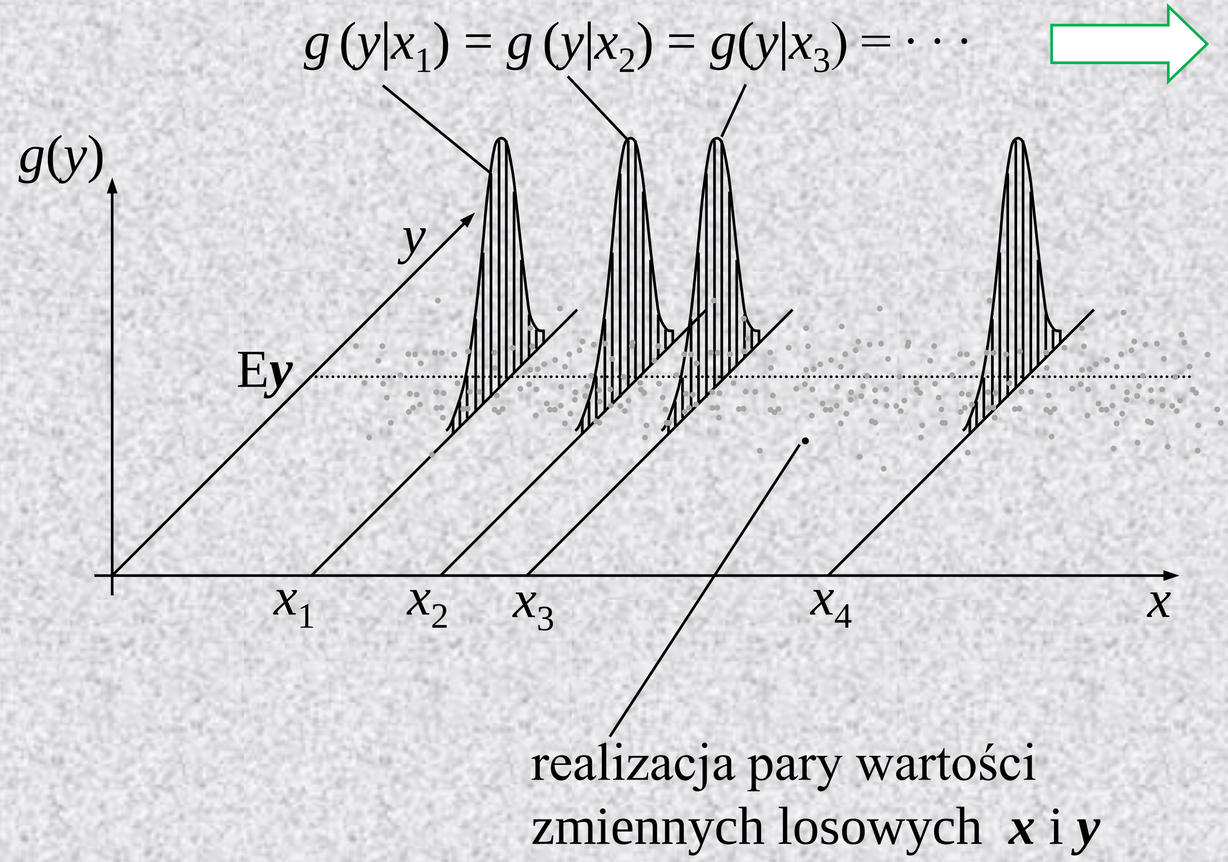
$\mathrm{E}(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}) = \mathrm{E}\boldsymbol{x} \pm \mathrm{E}\boldsymbol{y}$

$\mathrm{E}(\boldsymbol{xy}) = \mathrm{E}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{E}\boldsymbol{y}$

Jeśli zmienne losowe ***x*** i ***y*** są niezależne

<u>Przykłady zależności między zmiennymi</u>:

- masa i wzrost człowieka
- obciążenie i odkształcenie elementu maszyny
- czas między uszkodzeniami łożysk podpierających oś w samochodzie
- obciążenia dwóch łożysk podpierających wał maszyny



$\boxed{g(y|x) = g(y)}$

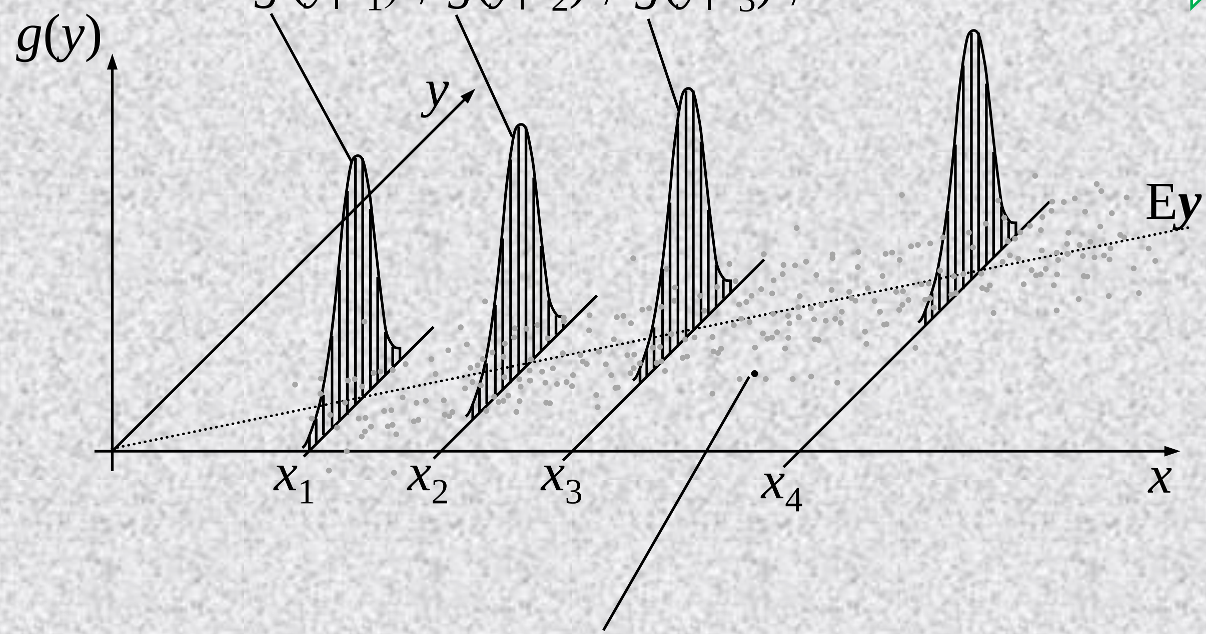
zmienne losowe ***x*** i ***y*** niezależne

$\boxed{\rho = 0}$

Miarą siły zależności między zmiennymi losowymi stosowaną w praktyce – **współczynnik korelacji** ρ.

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Ilustracja przykładu zależności zmiennej losowej ***y*** od zmiennej losowej ***x***



$\boxed{g\,(y|x) \neq g(y)}$

$\boxed{0 < |\rho| < 1}$

realizacja pary wartości
zmiennych losowych ***x*** i ***y***

WŁAŚCIWOŚCI WARIANCJI

$\mathrm{V}c = 0$

$\mathrm{V}(c\boldsymbol{x}) = c^2\mathrm{V}\boldsymbol{x}$

$\mathrm{V}(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}) = \mathrm{V}\boldsymbol{x} + \mathrm{V}\boldsymbol{y} \pm 2\rho\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{x} \cdot \mathrm{V}\boldsymbol{y}}$

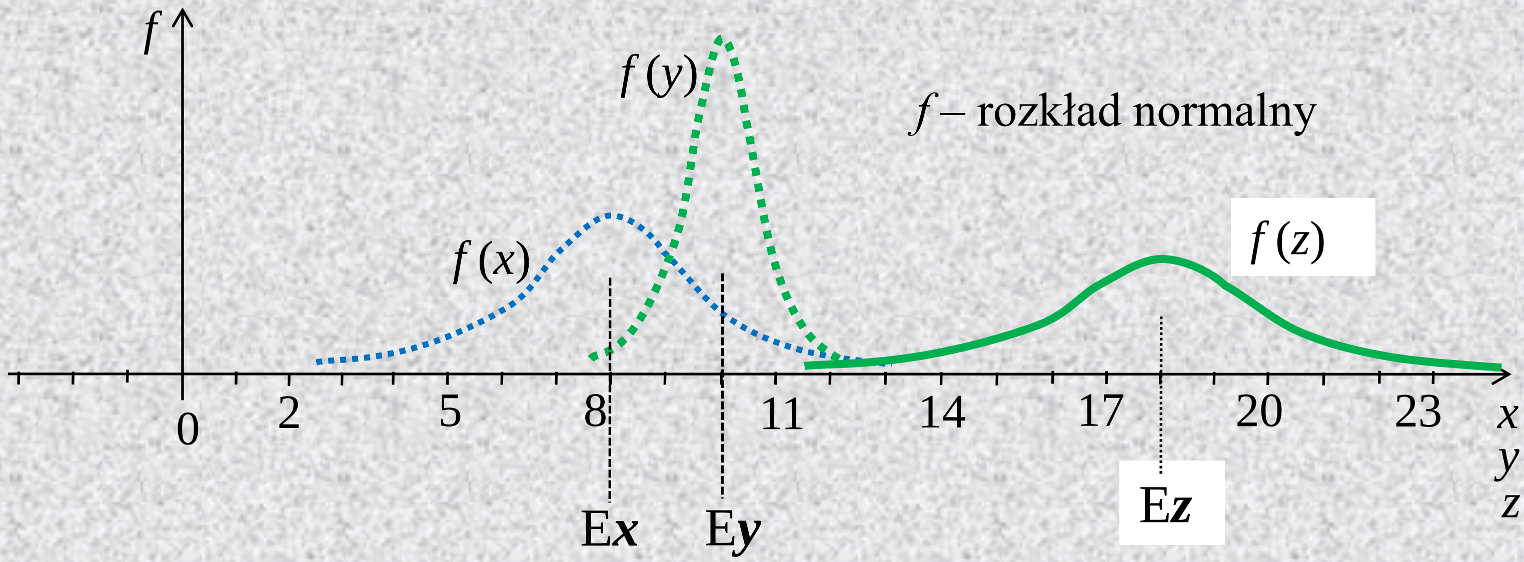
odchylenie standardowe sumy (różnicy) niezależnych zmiennych losowych

$$\sigma_{x \pm y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Suma zmiennych losowych

Suma z dwóch niezależnych zmiennych losowych x i y

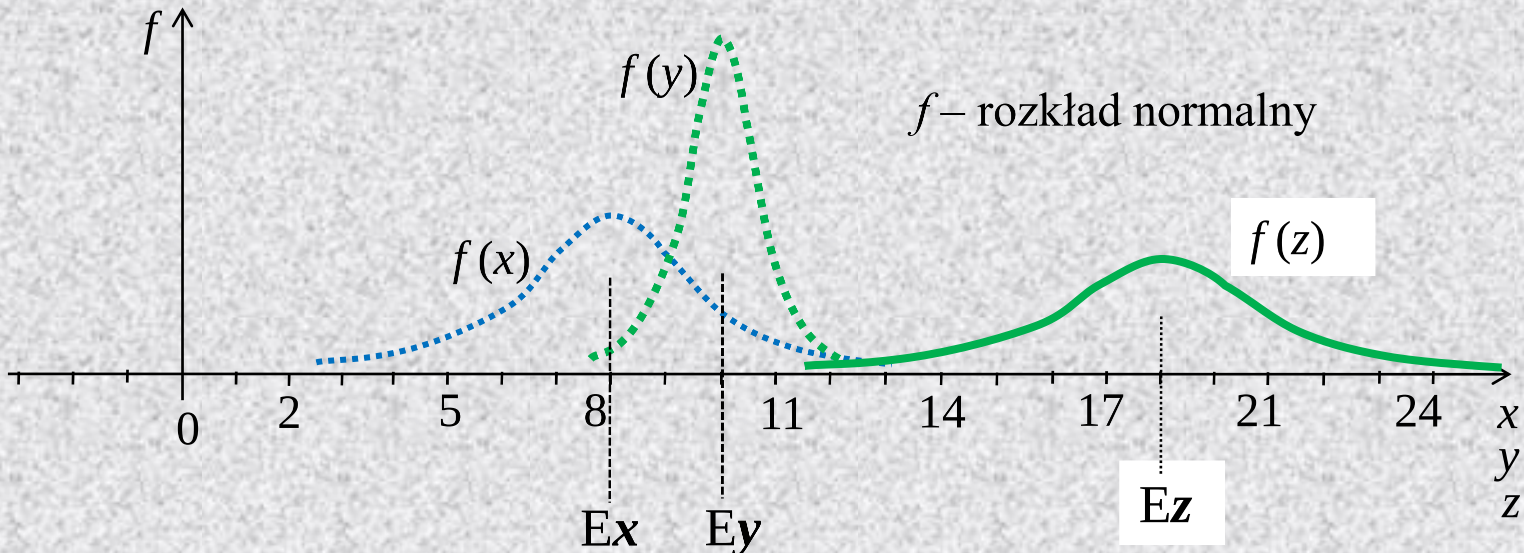
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \longrightarrow \mathrm{E}\boldsymbol{z} = \mathrm{E}\boldsymbol{x} + \mathrm{E}\boldsymbol{y} \qquad \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

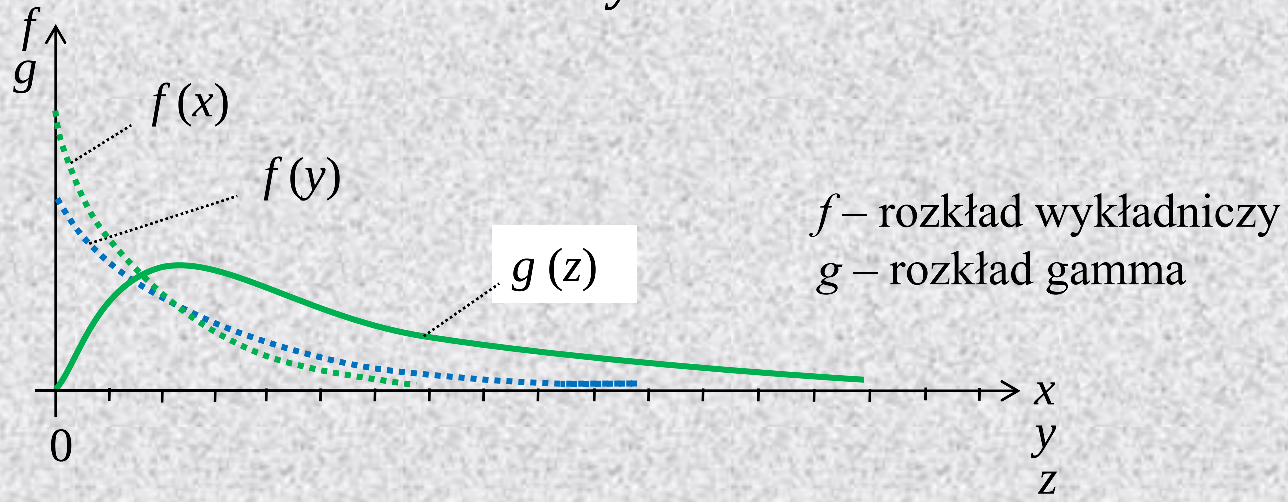


Suma zmiennych losowych

Suma $\boldsymbol{z}$ dwóch niezależnych zmiennych losowych $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$

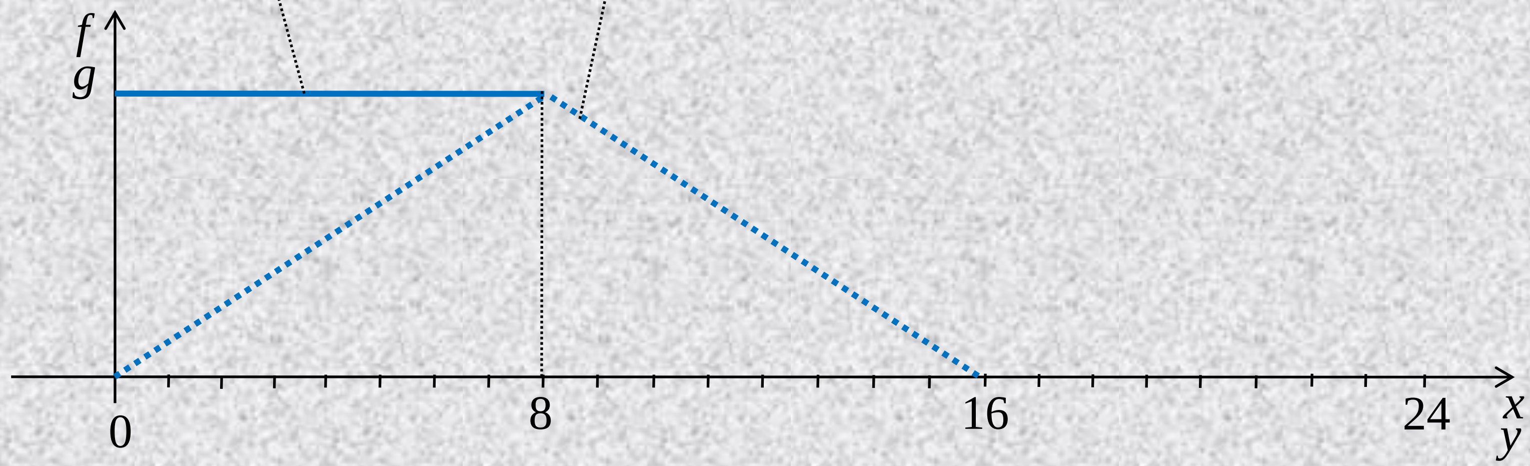
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \longrightarrow \mathrm{E}\boldsymbol{z} = \mathrm{E}\boldsymbol{x} + \mathrm{E}\boldsymbol{y} \qquad \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$





$f\,(x)$ → ***x*** – zmienna losowa o rozkładzie równomiernym (jednostajnym)

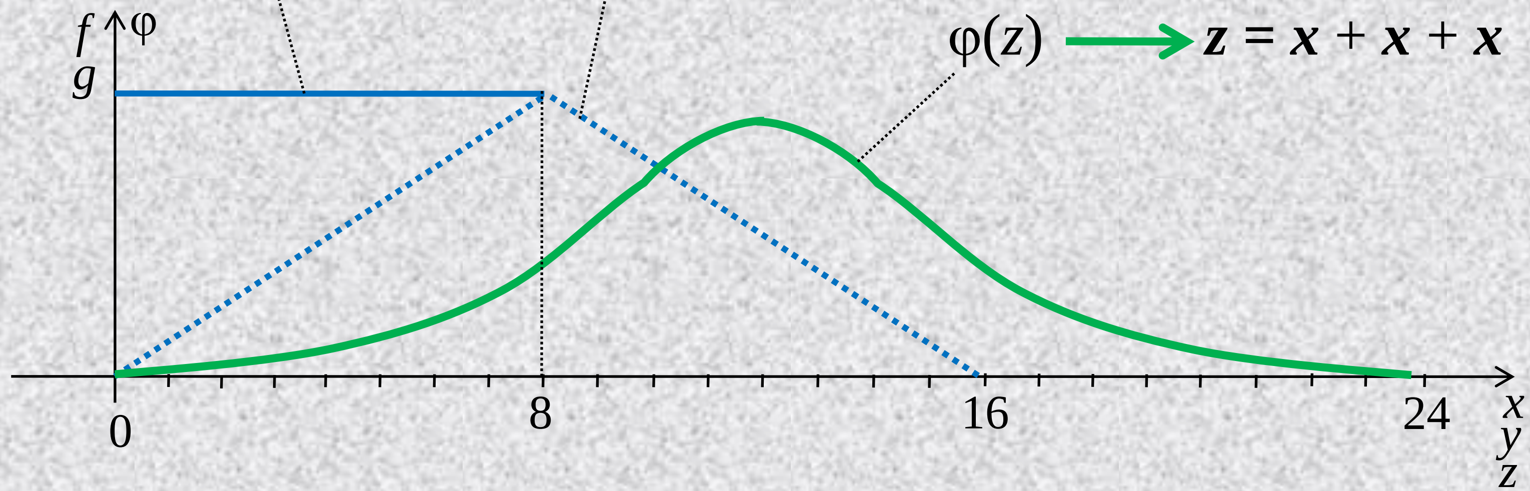
$g(y)$ → $\boldsymbol{y = x + x}$

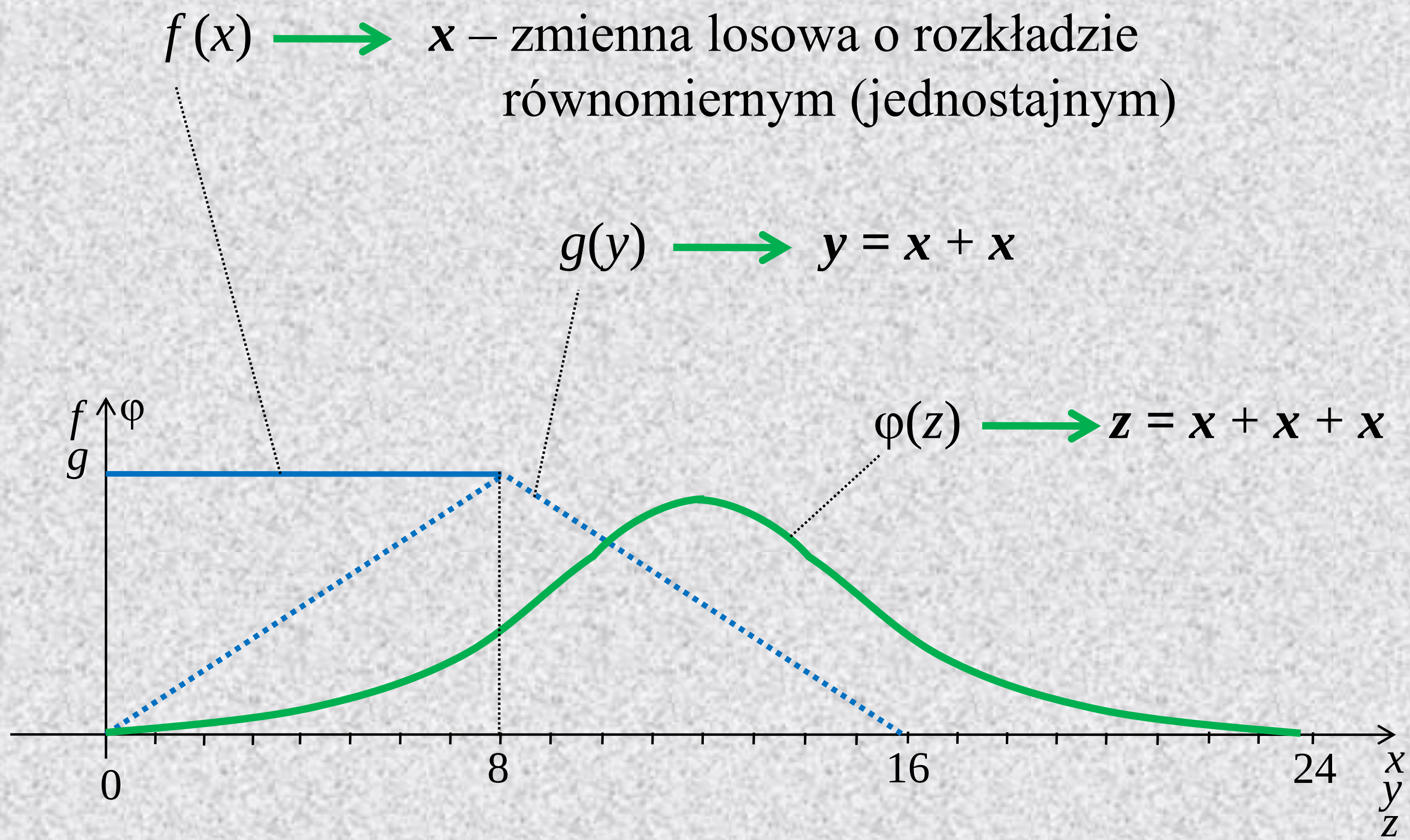


$f(x)$ ⟶ $\boldsymbol{x}$ – zmienna losowa o rozkładzie równomiernym (jednostajnym)

$g(y)$ ⟶ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}$

$\varphi(z)$ ⟶ $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}$





Centralne twierdzenie graniczne: suma niezależnych zmiennych losowych ma rozkład asymptotycznie normalny.

PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Zadanie 1

Dystrybuanta, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$ o rozkładzie wykładniczym.

Zadanie 1

Dystrybuanta, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$ o rozkładzie wykładniczym.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow \qquad Q(x) = P\{\boldsymbol{x} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Zadanie 1

Dystrybuanta, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej losowej ***x*** o rozkładzie wykładniczym.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow Q(x) = P\{\mathbf{x} < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$Q(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Zadanie 1

Dystrybuanta, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej losowej ***x*** o rozkładzie wykładniczym.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow \quad Q(x) = P\{\mathbf{x} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$Q(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

$$\mathrm{E}\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \rightarrow \mathrm{E}\mathbf{x} = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \cdots$$

PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Zadanie 1

Dystrybuanta, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$ o rozkładzie wykładniczym.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \longrightarrow Q(x) = P\{\boldsymbol{x} < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$Q(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

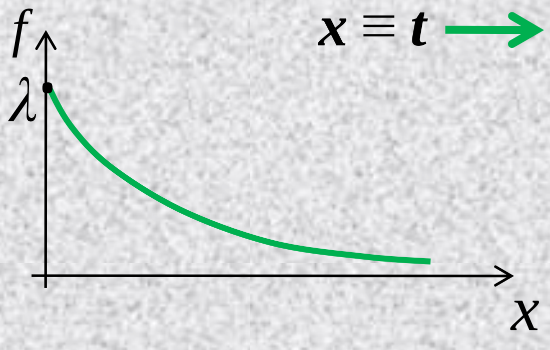
$$\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \rightarrow \mathrm{E}\boldsymbol{x} = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \cdots$$

$$\boxed{\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}} \qquad \mathrm{V}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$

Zadanie 2

Na podstawie badań samolotu bezzałogowego stwierdzono, że czas ***t*** upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, a średnia wartość tego czasu wynosi 3000 h. Należy wyznaczyć parametr λ tego rozkładu i odchylenie standardowe σ zmiennej losowej ***t***. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa narysować przybliżony wykres jej przebiegu oraz zaznaczyć położenie wartości oczekiwanej zmiennej ***t***.

Rozwiązanie



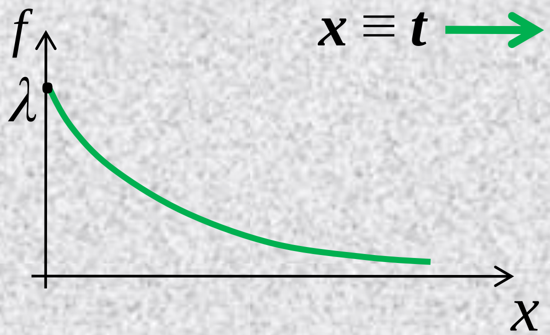
$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{t} \longrightarrow \mathrm{E}\boldsymbol{t} = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow \lambda = \frac{1}{\mathrm{E}\boldsymbol{t}} = \frac{1}{3000} = 0{,}33 \cdot 10^{-3}[1/\mathrm{h}]$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}\boldsymbol{t} = 3000\ \mathrm{h}$$

Zadanie 2

Na podstawie badań samolotu bezzałogowego stwierdzono, że czas ***t*** upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, a średnia wartość tego czasu wynosi 3000 h. Należy wyznaczyć parametr λ tego rozkładu i odchylenie standardowe σ zmiennej losowej ***t***. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa narysować przybliżony wykres jej przebiegu oraz zaznaczyć położenie wartości oczekiwanej zmiennej ***t***.

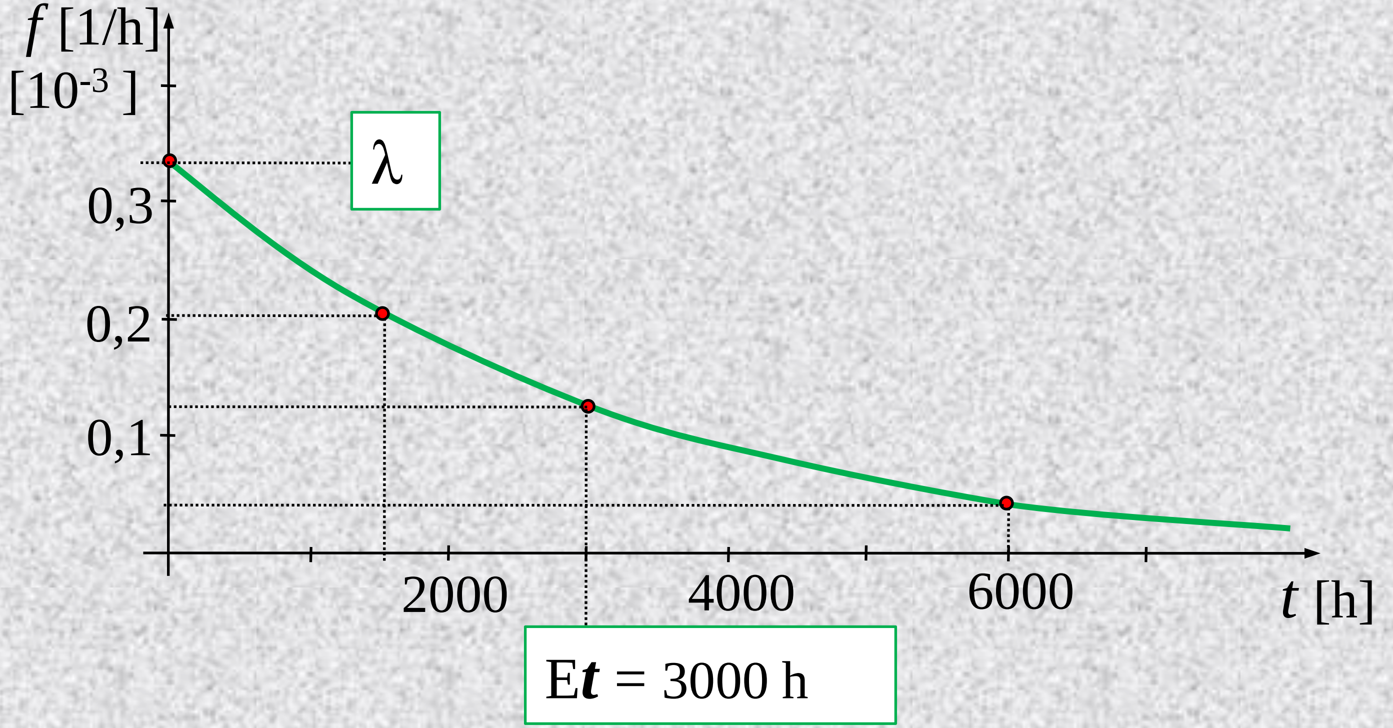
Rozwiązanie



$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{t} \longrightarrow \mathrm{E}\boldsymbol{t} = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow \lambda = \frac{1}{\mathrm{E}\boldsymbol{t}} = \frac{1}{3000} = 0{,}33 \cdot 10^{-3}[1/\mathrm{h}]$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}\boldsymbol{t} = 3000\ \mathrm{h}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \longrightarrow \begin{cases} f(3000) = \dfrac{1}{3000} e^{-\frac{1}{3000}\cdot 3000} = 0{,}123 \cdot 10^{-3} \\ f(6000) = \dfrac{1}{3000} e^{-\frac{1}{3000}\cdot 6000} = 0{,}043 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

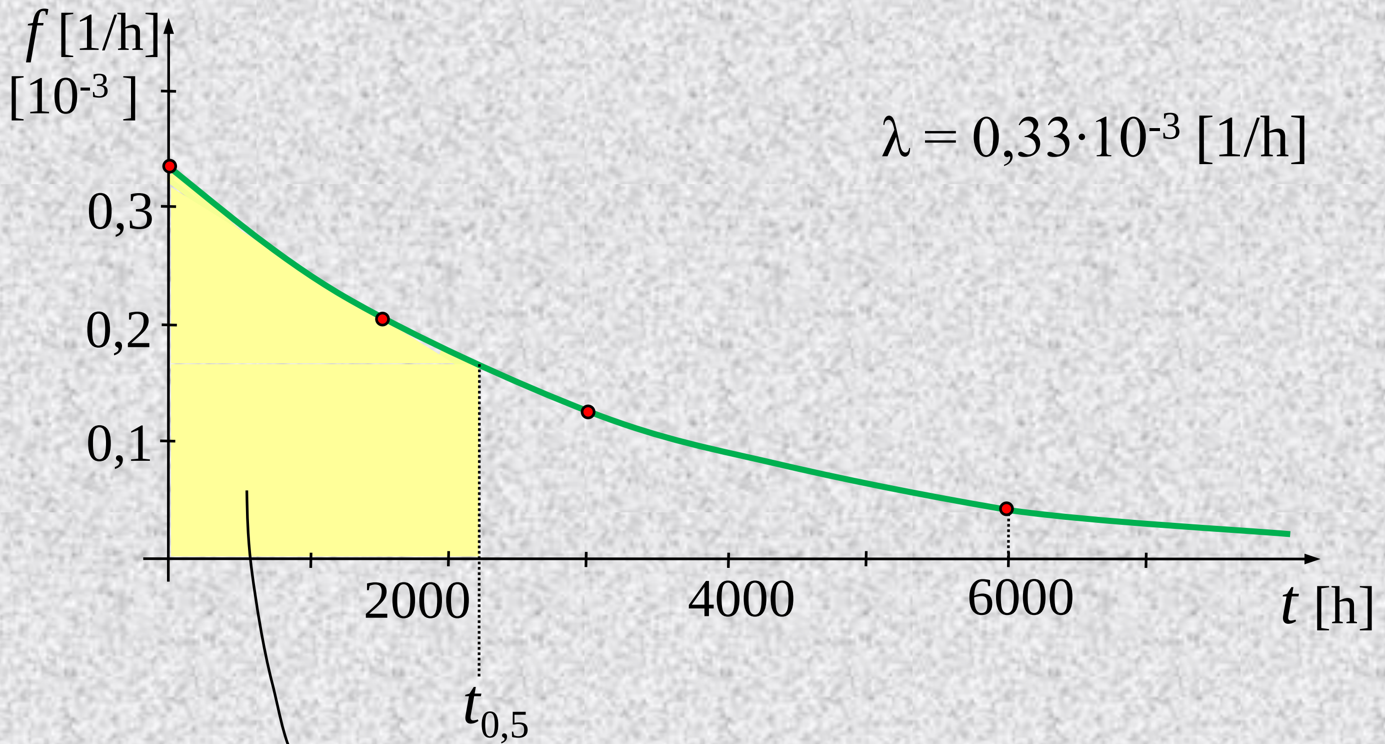


$$\boxed{\mathrm{E}\boldsymbol{t} = \sigma = 1/\lambda}$$

<u>Zadanie 3</u>

Należy wyznaczyć medianę zmiennej losowej $\boldsymbol{t}$, o której mowa w zadaniu 2.

Rozwiązanie

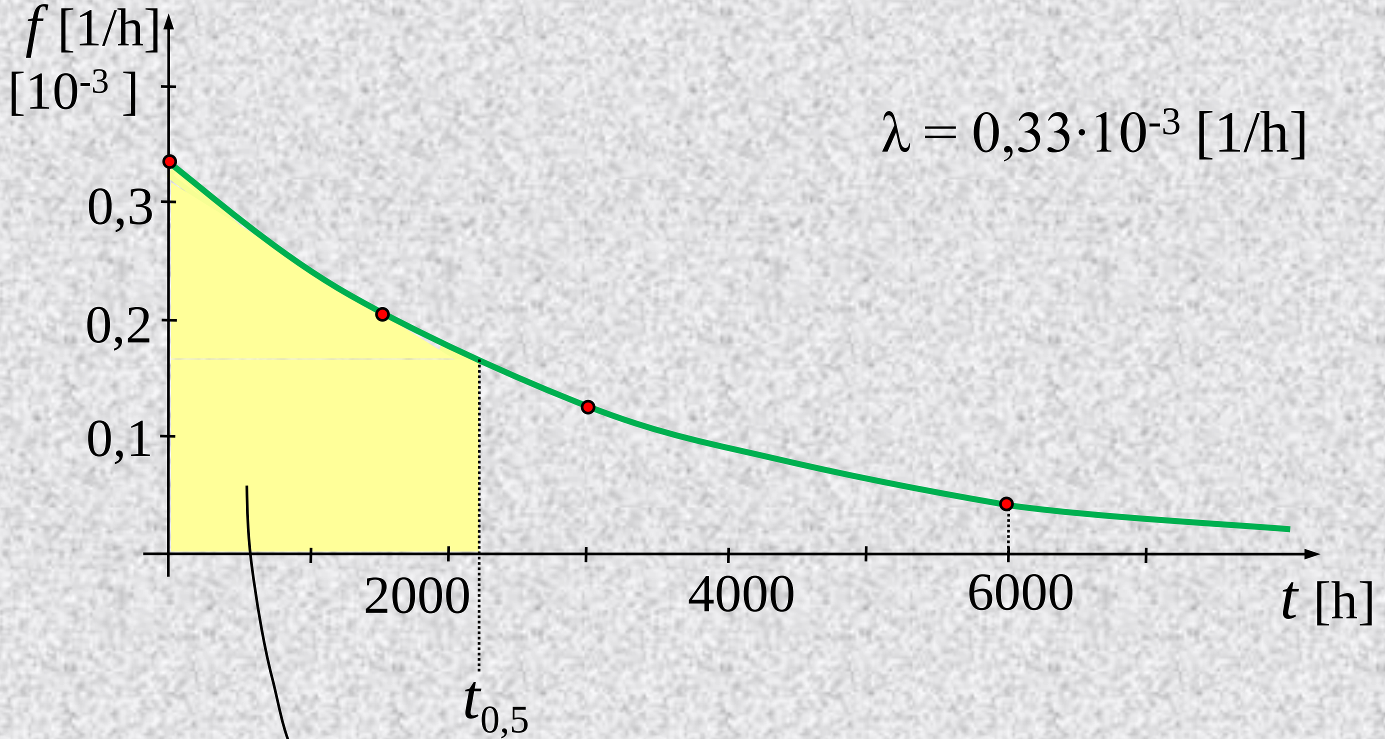


$\lambda = 0{,}33 \cdot 10^{-3}$ [1/h]

$t_{0,5} = ?$

$\boxed{Q(t_{0,5}) = 0{,}5}$

Rozwiązanie



$\lambda = 0{,}33 \cdot 10^{-3}$ [1/h]

$t_{0,5} = ?$

$\boxed{Q(t_{0,5}) = 0{,}5}$

$$Q(t_{0,5}) = P\{\boldsymbol{t} \le t_{0,5}\} = \int_0^{t_{0,5}} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_{0,5}} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda t_{0,5}}$$

$$1 - e^{-\lambda t_{0,5}} = 0,5$$

$$e^{-\lambda t_{0,5}} = 0,5$$

$$-\lambda t_{0,5} \cdot \ln e = \ln 0,5$$

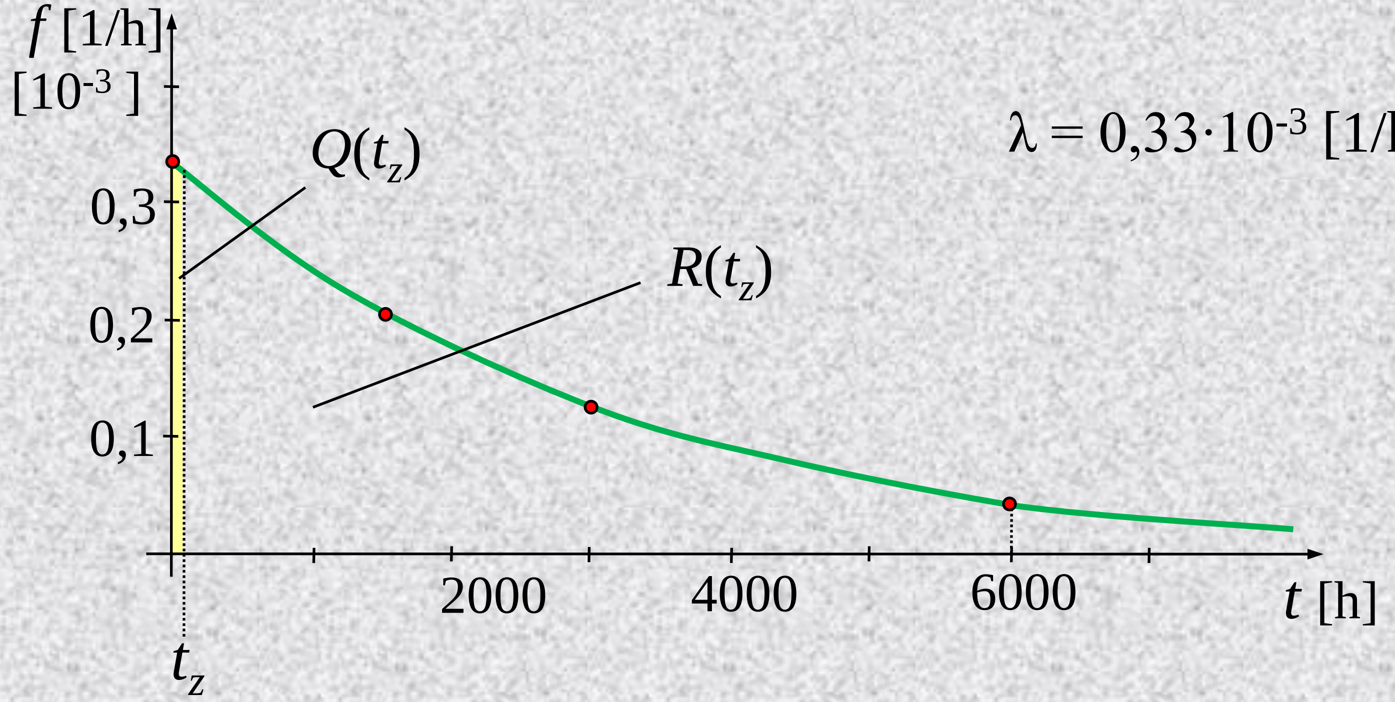
$$\boxed{t_{0,5} = -\frac{\ln 0,5}{\lambda}} = -\frac{-0,693}{0,33 \cdot 10^{-3}} = 2100\ [\mathrm{h}] = 0,693\ \mathrm{E}\boldsymbol{t}$$

$$t_{0,5} = 0,693\ \mathrm{E}\boldsymbol{t}$$

<u>Zadanie 5</u>

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo nieuszkodzenia pokładowego układu sterowania, o którym mowa w zadaniu 2, w czasie t_z = 40 h trwania lotu samolotu bezzałogowego.

Rozwiązanie

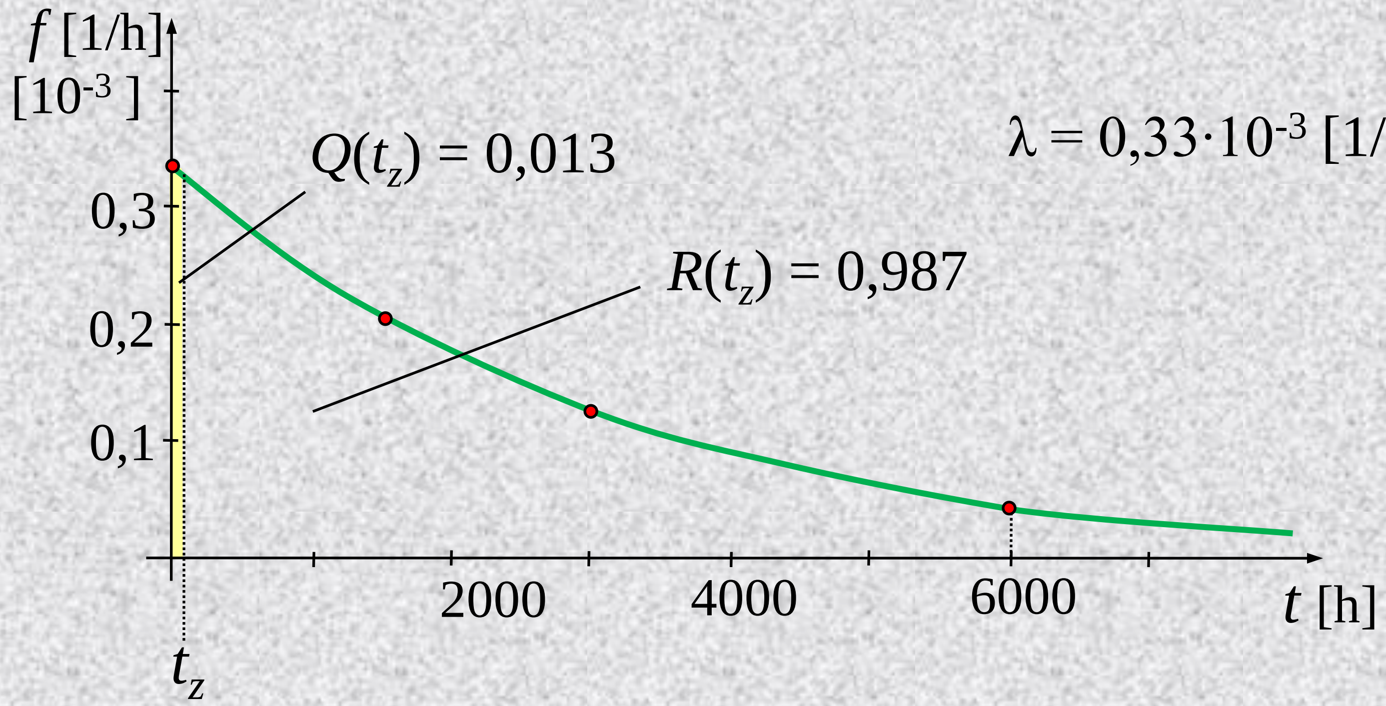


$\lambda = 0{,}33 \cdot 10^{-3}$ [1/h]

$P\{\mathbf{t} > t\} \equiv R(t)$ – (funkcja niezawodności)

$P\{\mathbf{t} > t\} = 1 - Q(t) = e^{-\lambda t}$ (p. zadanie 1)

Rozwiązanie



$P\{\mathbf{t} > t\} \equiv R(t)$ – (funkcja niezawodności)

$P\{\mathbf{t} > t\} = 1 - Q(t) = e^{-\lambda t}$ (p. zadanie 1)

$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}}$$

$$R(t_z) = e^{-\lambda t_z} = \mathrm{e}^{-0{,}33\cdot 10^{-3}\cdot 40} = 0{,}987$$

Zadanie 6

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana $\mathrm{E}\boldsymbol{R_m}$ = 1680 MPa, wariancja $\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}$ = (135 MPa)^2. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$ należy narysować przybliżony wykres przebiegu tej funkcji.

Zadanie 6

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana E$\boldsymbol{R_m}$ = 1680 MPa, wariancja V$\boldsymbol{R_m}$ = (135 MPa)^2. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$ należy narysować przybliżony wykres przebiegu tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}} \longrightarrow f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m - \mathrm{E}\boldsymbol{R_m})^2}{2 \cdot \mathrm{V}\boldsymbol{R_m}}}$$

Zadanie 6

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana E$\boldsymbol{R_m}$ = 1680 MPa, wariancja V$\boldsymbol{R_m}$ = (135 MPa)^2. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$ należy narysować przybliżony wykres przebiegu tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}} \longrightarrow f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}}\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m-\mathrm{E}\boldsymbol{R_m})^2}{2\cdot \mathrm{V}\boldsymbol{R_m}}}$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \longrightarrow \quad f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{135\sqrt{2\pi}} = 29{,}6\cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

Zadanie 6

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana E$\boldsymbol{R_m}$ = 1680 MPa, wariancja V$\boldsymbol{R_m}$ = (135 MPa)^2. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$ należy narysować przybliżony wykres przebiegu tej funkcji.

Rozwiązanie

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}} \longrightarrow f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m - \mathrm{E}\boldsymbol{R_m})^2}{2\cdot \mathrm{V}\boldsymbol{R_m}}}$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \longrightarrow f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{135\sqrt{2\pi}} = 29{,}6 \cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \pm \sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}} \longrightarrow f(R_m) = 29{,}6 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{1}{2}} = 18{,}0 \cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

Zadanie 6

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana $\mathrm{E}\boldsymbol{R_m}$ = 1680 MPa, wariancja $\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}$ = (135 MPa)^2. Po wyznaczeniu kilku wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$ należy narysować przybliżony wykres przebiegu tej funkcji.

Rozwiązanie

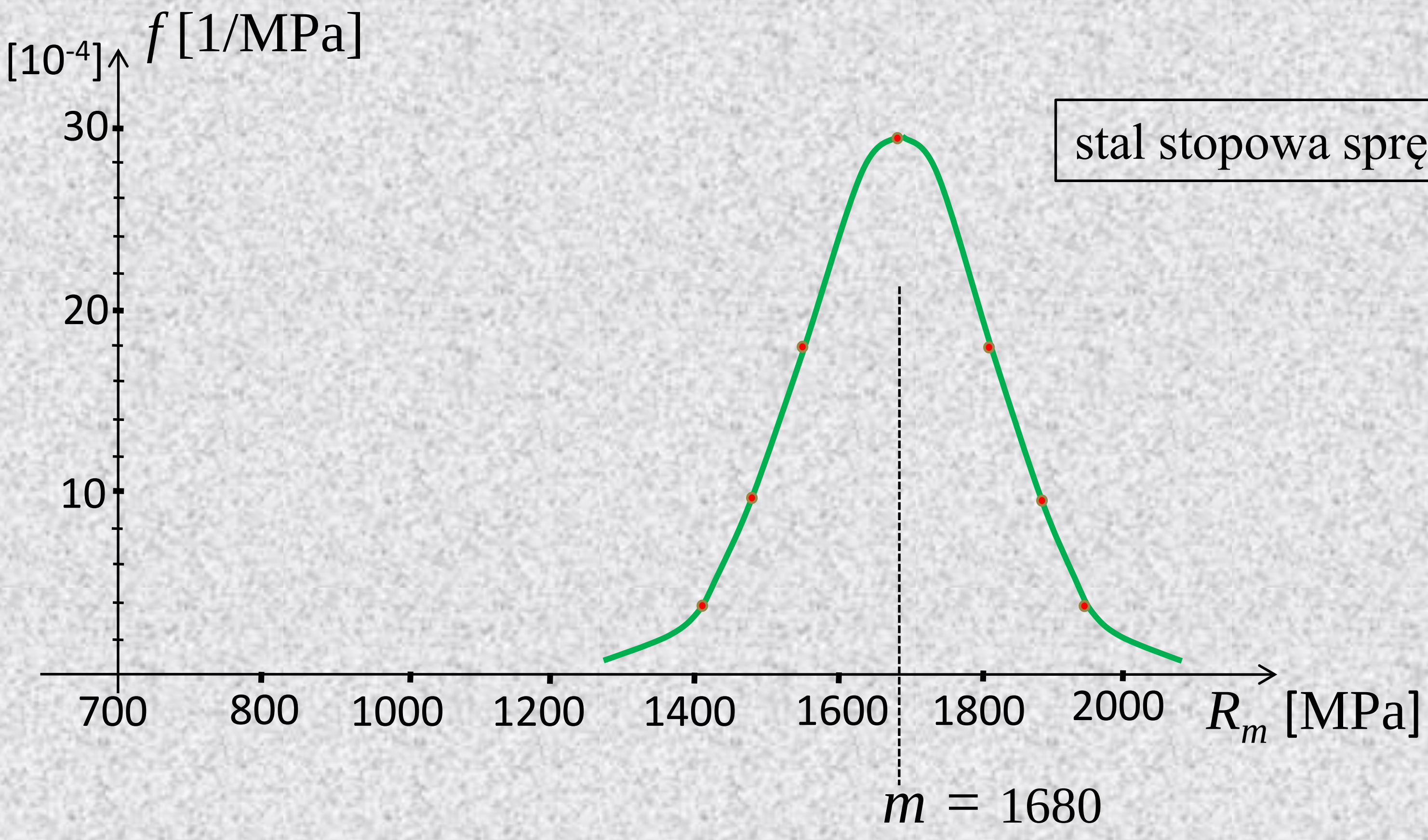
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}} \longrightarrow f(R_m) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m - \mathrm{E}\boldsymbol{R_m})^2}{2 \cdot \mathrm{V}\boldsymbol{R_m}}}$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \longrightarrow f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{135\sqrt{2\pi}} = 29{,}6 \cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \pm \sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}} \longrightarrow f(R_m) = 29{,}6 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{1}{2}} = 18{,}0 \cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \pm 1{,}5\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}}} \longrightarrow f(R_m) = 9{,}7 \cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

$$R_m = \mathrm{E}\boldsymbol{R_m} \pm 2\sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{R}_{\mathrm{m}}} \longrightarrow f(R_m) = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ [1/\mathrm{MPa}]$$

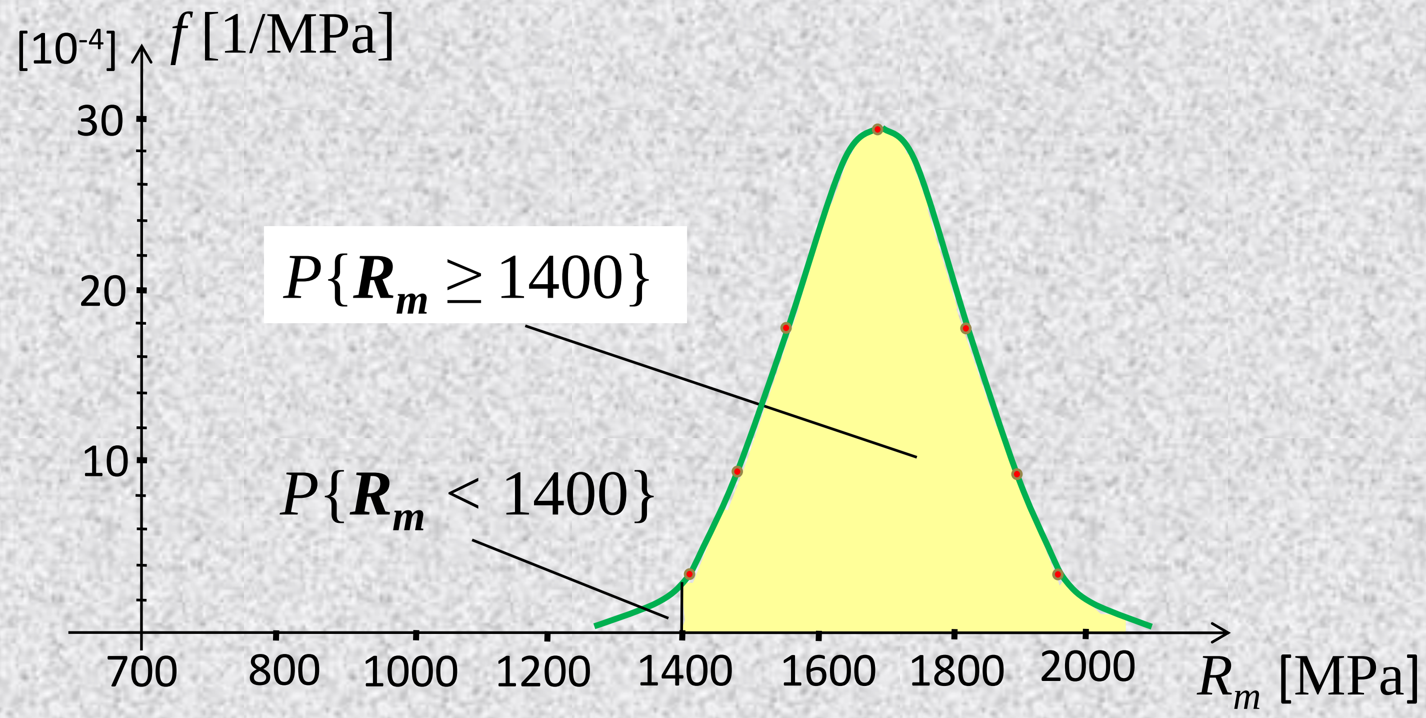


f [1/MPa]
[10-4]
30
20
10
stal stopowa sprężynowa
700
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
Rm [MPa]
m = 1680

Zadanie 7

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana E$\boldsymbol{R_m}$ = 1680 MPa, V$\boldsymbol{R_m}$ = (135 MPa)^2. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że materiał płaskownika wykonanego z tej stali, losowo wybranego z pojemnika identycznych płaskowników, ma granicę wytrzymałości równą co najmniej R_m = 1400 MPa.

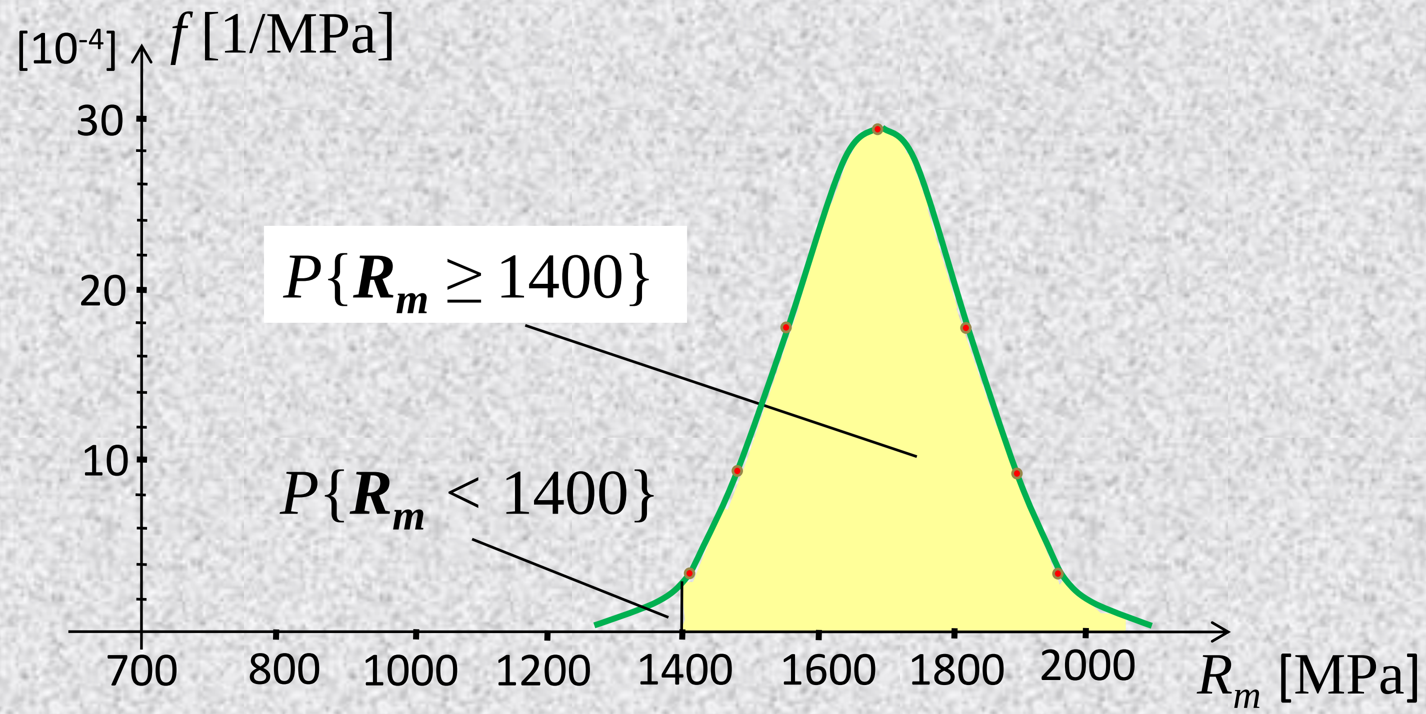
Rozwiązanie



Zadanie 7

Granica wytrzymałości doraźnej $\boldsymbol{R_m}$ pewnej stali stopowej sprężynowej ma rozkład w przybliżeniu normalny o parametrach: wartość oczekiwana $E\boldsymbol{R_m} = 1680$ MPa, $V\boldsymbol{R_m} = (135 \text{ MPa})^2$. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że materiał płaskownika wykonanego z tej stali, losowo wybranego z pojemnika identycznych płaskowników, ma granicę wytrzymałości równą co najmniej $R_m = 1400$ MPa.

Rozwiązanie



$$P\{\boldsymbol{R_m} \geq 1400\} = P\{\boldsymbol{R_m} > 1400\} = 1 - P\{\boldsymbol{R_m} \leq 1400\} = 1 - Q(1400)$$

$$Q(1400) = \int_0^{1400} f(R_m)\mathrm{d}R_m$$

$$f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(R_m - m)^2}{2\sigma^2}}$$

m = 1680 MPa, σ = 135 MPa

$$Q(1400) = \int_0^{1400} f(R_m)\,\mathrm{d}R_m$$

$$f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(R_m - m)^2}{2\sigma^2}}$$

m = 1680 MPa, σ = 135 MPa

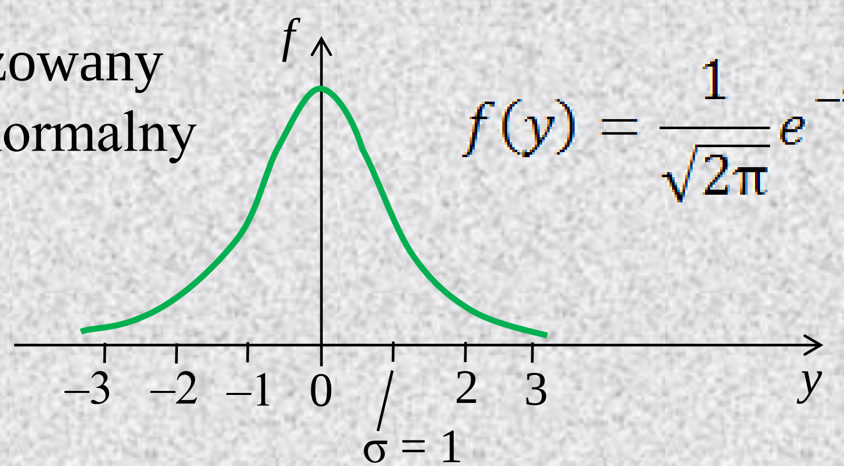
lub

$$\boldsymbol{R_m} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{R_m} - m}{\sigma}$$

$\boldsymbol{y}$ – zmienna losowa standaryzowana

standaryzowany rozkład normalny

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$$



$$Q(1400) = \int_0^{1400} f(R_m)\,\mathrm{d}R_m$$

$$f(R_m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(R_m - m)^2}{2\sigma^2}}$$

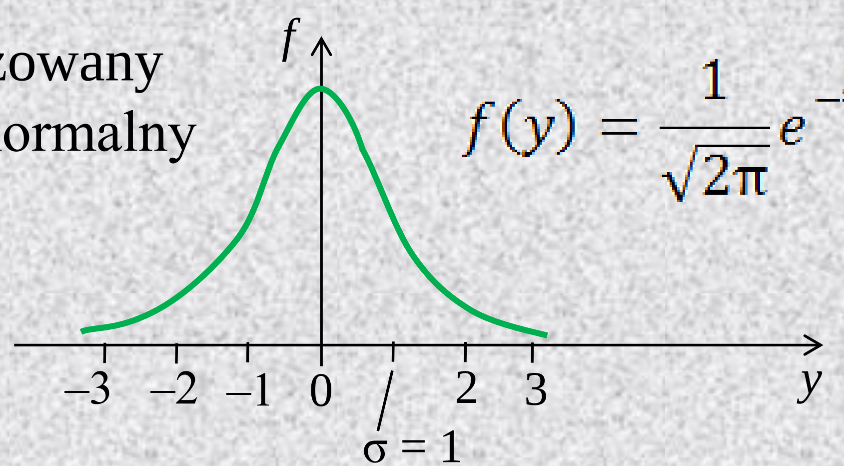
m = 1680 MPa, σ = 135 MPa

lub

$$\boldsymbol{R_m} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{R_m} - m}{\sigma}$$

$\boldsymbol{y}$ – zmienna losowa standaryzowana

standaryzowany rozkład normalny



$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$Q(1400) = \Phi\left(\frac{1400 - 1680}{135}\right)$$

$$\boxed{Q(1400) \approx 0{,}02 = 2\%}$$

tablice

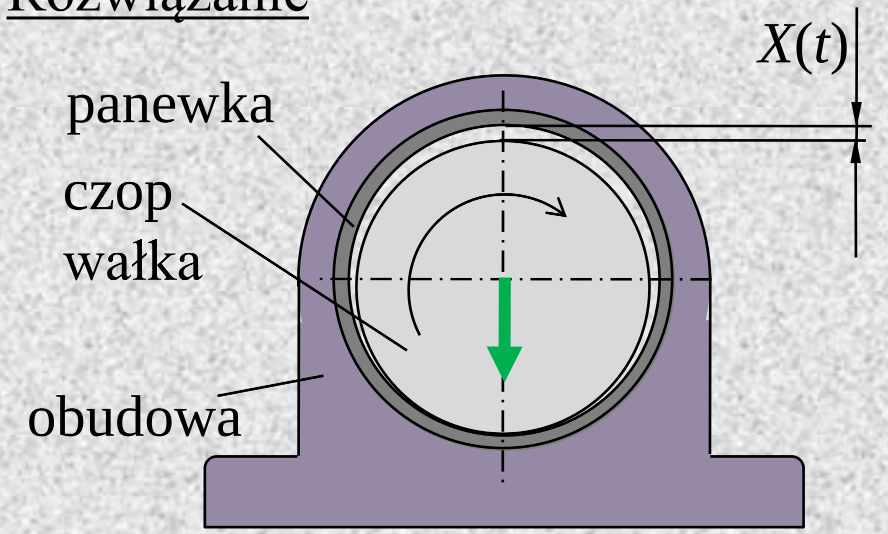
Zadanie 8

Wałek pewnego urządzenia mechanicznego jest podparty dwoma jednakowymi łożyskami ślizgowymi jednakowo obciążonymi. Powiększanie się luzu w każdym z nich opisuje funkcja

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X_o} + \boldsymbol{v_x} t\ ,$$

w której $\boldsymbol{X_o}$ jest luzem początkowym, a $\boldsymbol{v_x}$ jest prędkością zużywania się współpracujących elementów. Zmienne losowe $\boldsymbol{X_o}$ i $\boldsymbol{v_x}$ mają rozkłady normalne o parametrach: $\mathrm{E}\boldsymbol{X_o} = 100$ μm, $\mathrm{V}\boldsymbol{X_o} = 100$ (μm)^2, $\mathrm{E}\boldsymbol{v_x} = 0{,}1$ μm/h, $\mathrm{V}\boldsymbol{v_x} = 10^{-4}$ (μm/h)^2. Graniczna wartość luzu, po której osiągnięciu łożysko traktuje się jako uszkodzone, $X_{kr} = 220$ μm. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia łożyska w czasie $t_k = 1000$ h.

Rozwiązanie

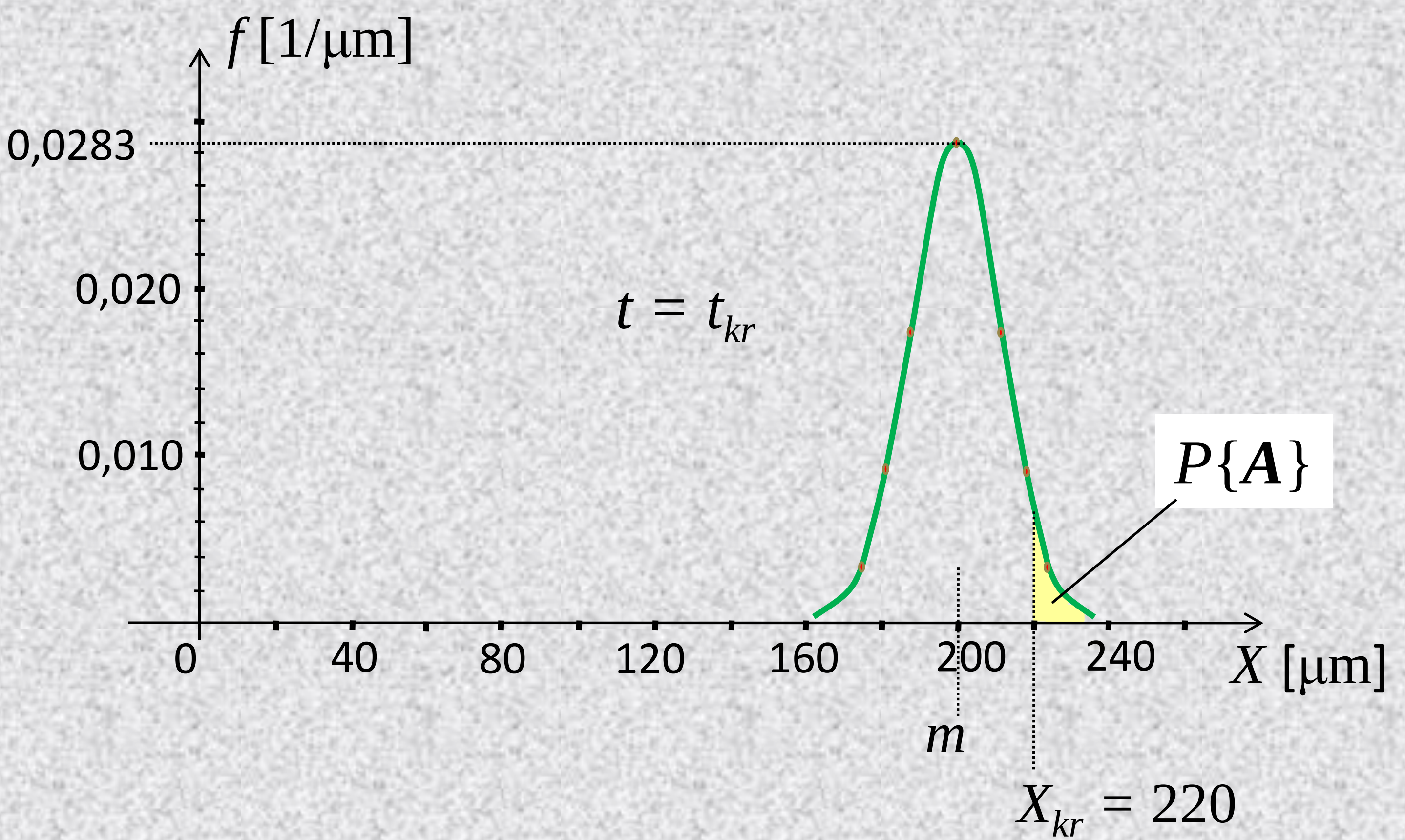


Uszkodzenie $\equiv \boldsymbol{A} \equiv \{\boldsymbol{X}(t_k) \geq X_{kr}\}$

$$\boxed{P\{\boldsymbol{A}\} \equiv P\{\boldsymbol{X_o} + \boldsymbol{v_x} t_k \geq X_{kr}\}}$$

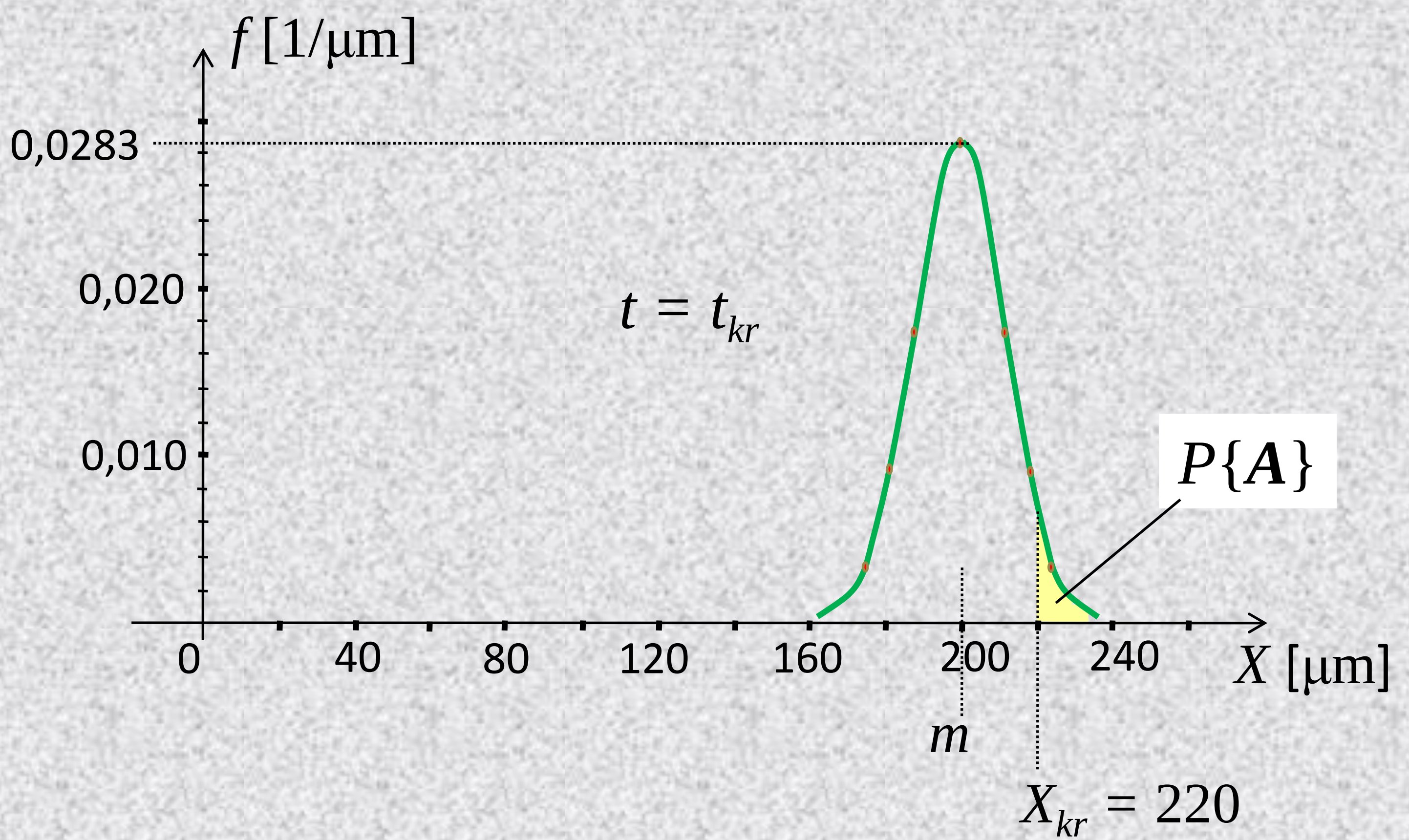
$$m = \mathrm{E}\boldsymbol{X_o} + t_k \mathrm{E}\boldsymbol{v_x} = 200\ \mu\mathrm{m}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}\boldsymbol{X_o} + t_k^2 \mathrm{V}\boldsymbol{v_x}} = 14{,}1\ \mu\mathrm{m}$$



$$P\{\boldsymbol{A}\} = 1 - P\{\boldsymbol{X} \le X_{kr}\} = 1 - \underbrace{Q(X_{kr})}$$

$$Q(220) = \boxed{\int_0^{220} f(X)\,\mathrm{d}X}$$

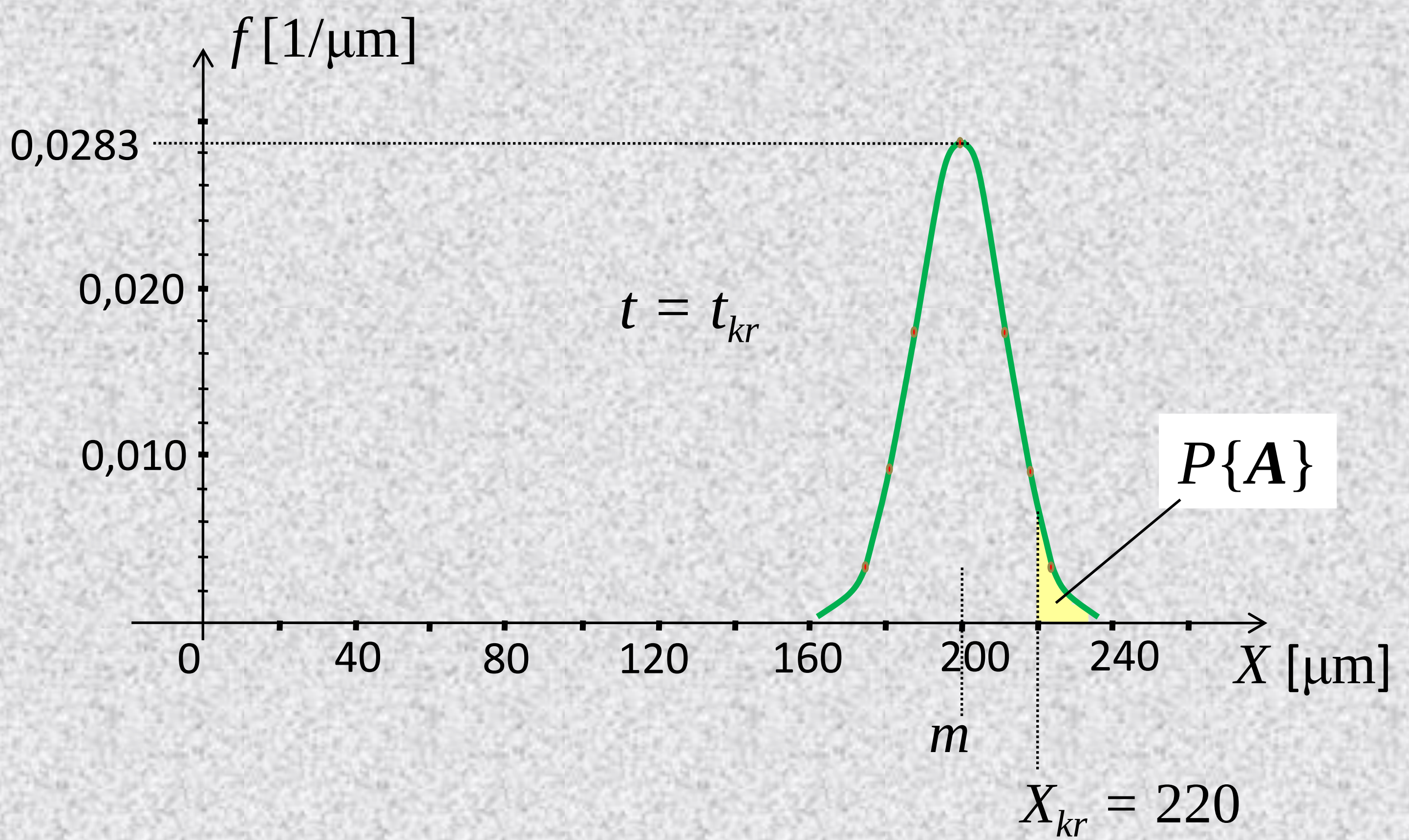


$$P\{\boldsymbol{A}\} = 1 - P\{\boldsymbol{X} \leq X_{kr}\} = 1 - Q(X_{kr})$$

$$Q(220) = \boxed{\int_0^{220} f(X)\mathrm{d}X}$$

tablice

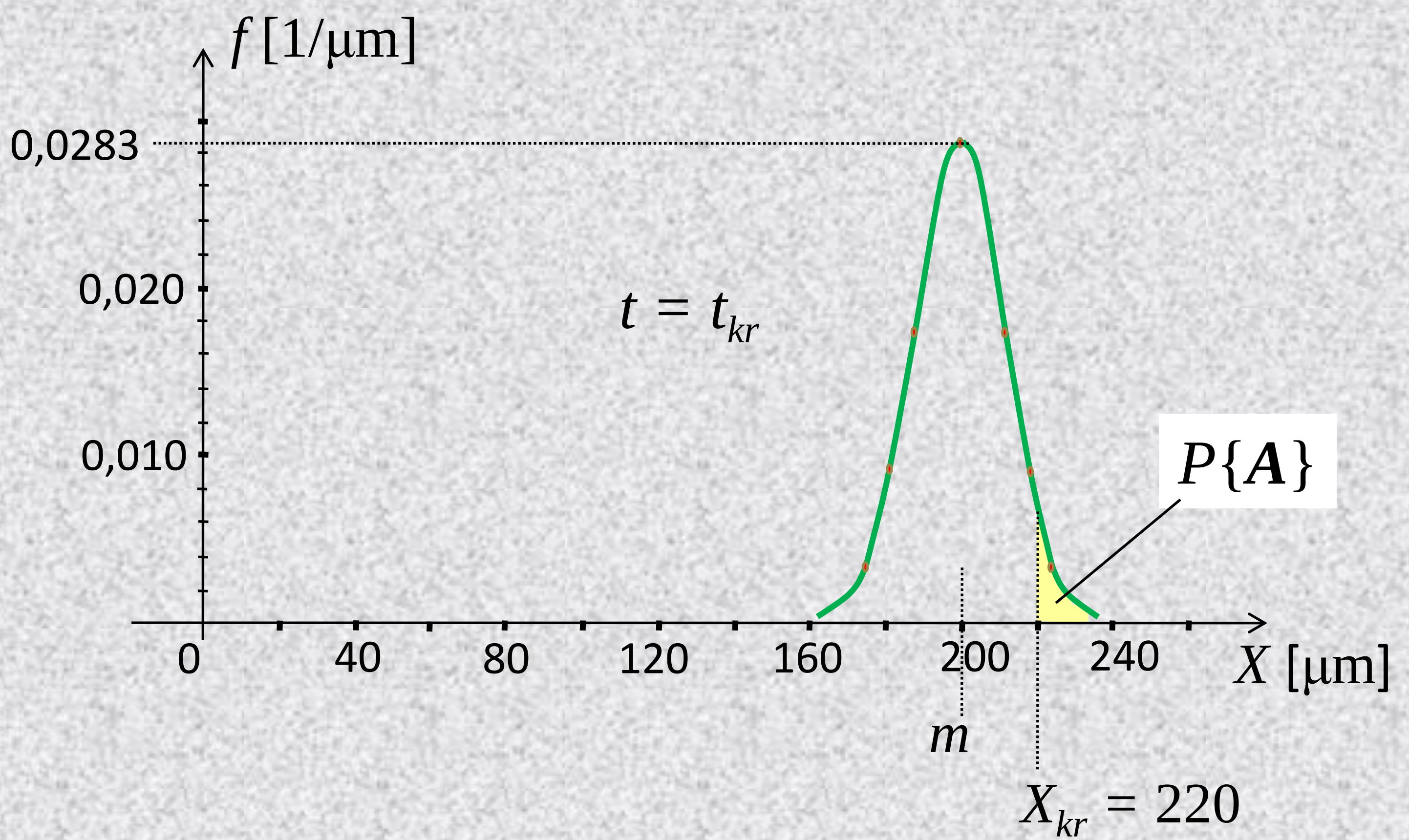
$$\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{X} - m}{\sigma} \Rightarrow Q(X) = \Phi(y)$$



$$P\{\boldsymbol{A}\} = 1 - P\{\boldsymbol{X} \leq X_{kr}\} = 1 - Q(X_{kr})$$

$$Q(220) = \int_0^{220} f(X)\mathrm{d}X = \Phi\left(\frac{220 - 200}{14{,}1}\right) = \Phi(1{,}42) = 0{,}922$$

$$\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{X} - m}{\sigma}$$



$$P\{\boldsymbol{A}\} = 1 - P\{\boldsymbol{X} \le X_{kr}\} = 1 - Q(X_{kr})$$

$$Q(220) = \boxed{\int_0^{220} f(X)\,\mathrm{d}X} = \Phi\left(\frac{220 - 200}{14{,}1}\right) = \Phi(1{,}42) = 0{,}922$$

$$\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{X} - m}{\sigma}$$

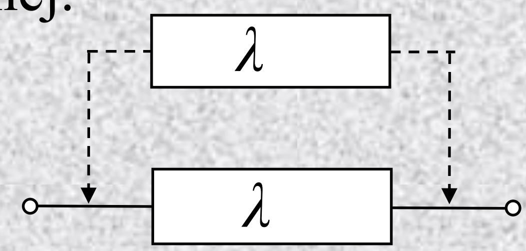
$$\boxed{P\{\boldsymbol{A}\} = 1 - 0{,}922 = 0{,}078}$$

Zadanie 9

W chwili wystąpienia uszkodzenia elementu podstawowego w pewnym urządzeniu elektronicznym włącza się automatycznie do funkcjonowania i zastępuje go w działaniu drugi taki sam element należący do tego urządzenia. Czasy poprawnego funkcjonowania obu elementów są jednakowymi zmiennymi losowymi **τ** o rozkładzie wykładniczym, przy czym parametr λ = = 0,030 [1/rok]. Wiedząc, że dystrybuanta czasu ***t*** bezawaryjnego funkcjonowania urządzenia złożonego z tych elementów ma postać

$$Q(t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t},$$

należy wyprowadzić wzór na gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej ***t*** oraz wyznaczyć wartość mody tej zmiennej.



Rozwiązanie

$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}$ rozkład wykładniczy $\longrightarrow$ $g(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$

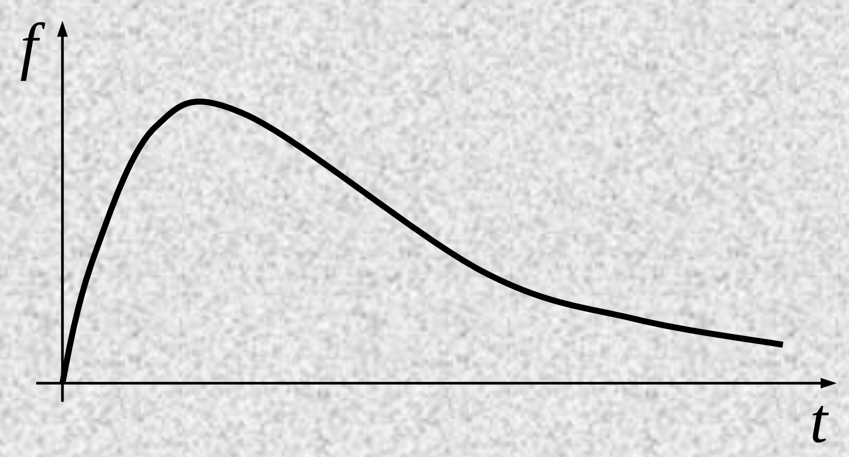
$f(t)$ $\qquad f(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$

$$Q(t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}\right) = -[-\lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} + \lambda t\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)]$$

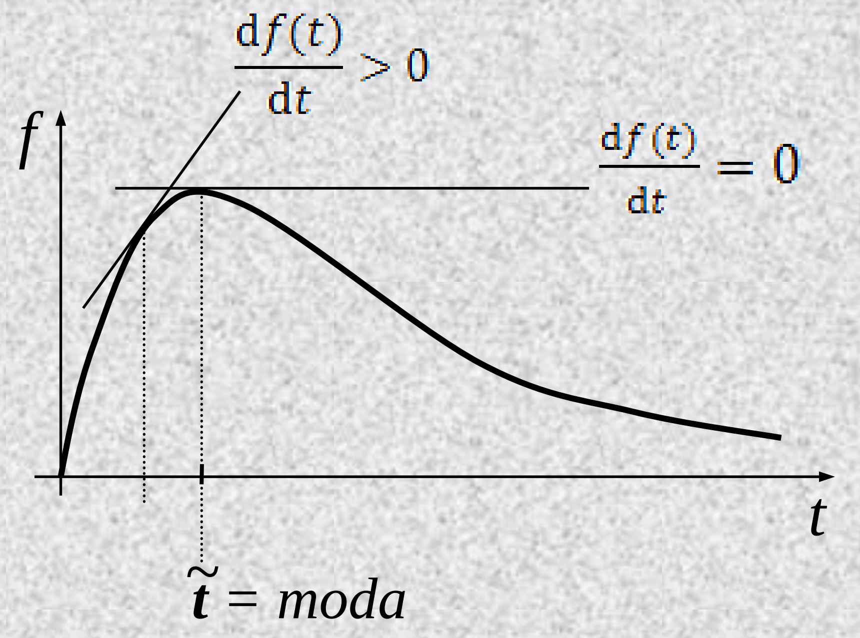
$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda t\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$



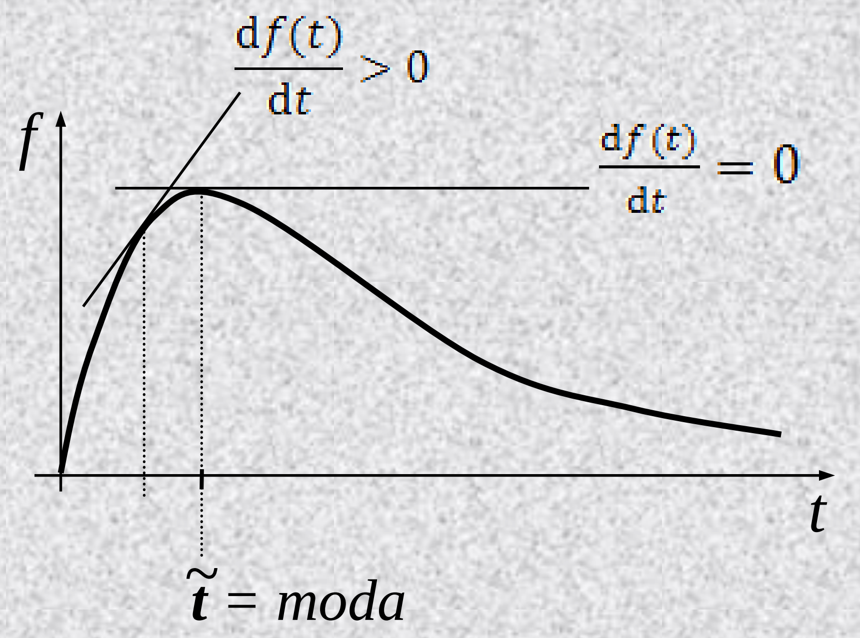
$$\boxed{f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{t} = moda}$$



$$\boxed{f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$

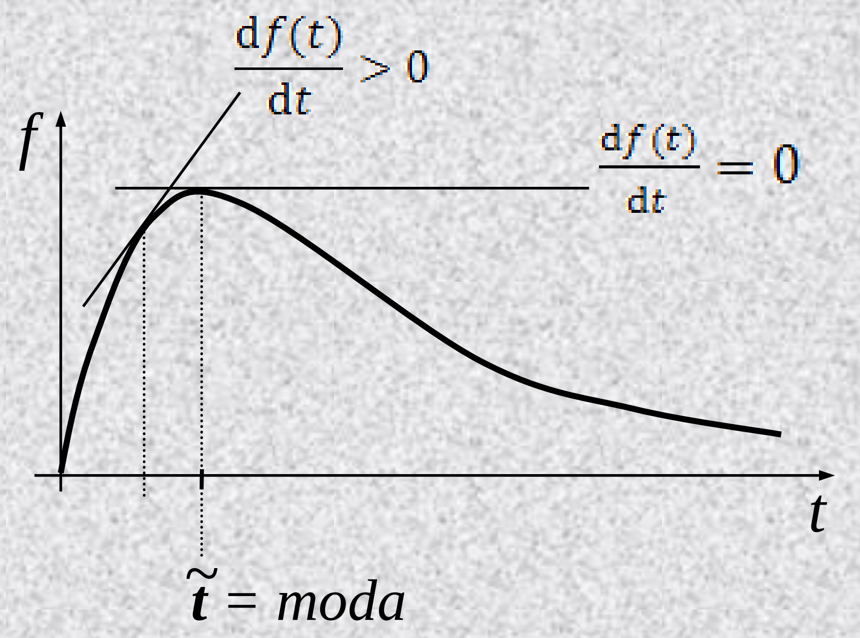
$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{\boldsymbol{t}} = moda}$$



$$\lambda^2 e^{-\lambda t}(1 - \lambda t) = 0$$

$t = \infty$ lub $t = \frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$



$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{t} = moda}$$

$$\lambda^2 e^{-\lambda t}(1 - \lambda t) = 0$$

$t = \infty$ lub $t = \dfrac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\tilde{t} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}030} = 33{,}33 \text{ lat}}$$

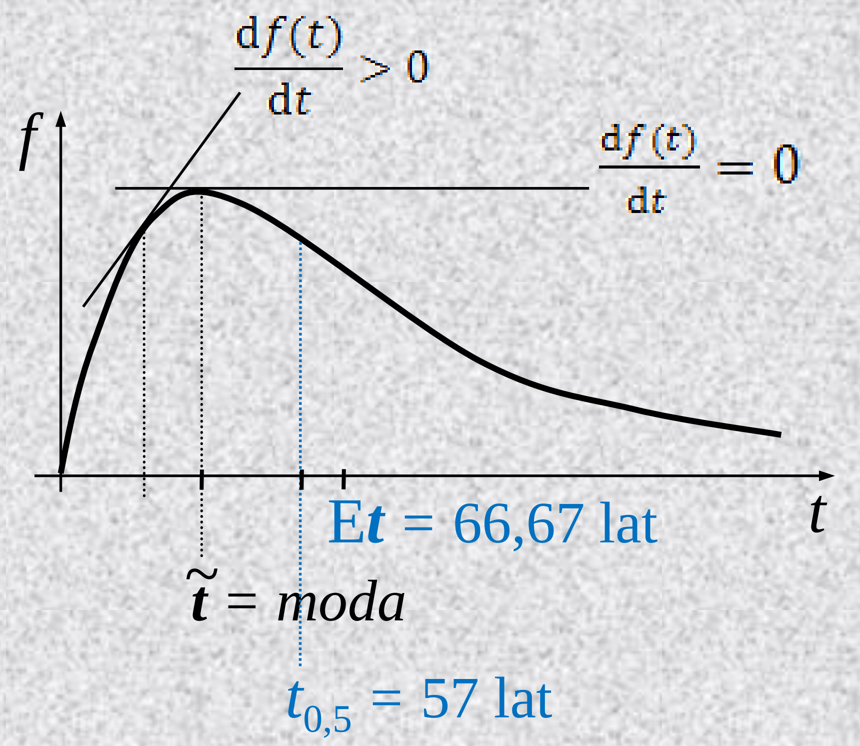
$$\boxed{f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{t} = moda}$$

$$\lambda^2 e^{-\lambda t}(1 - \lambda t) = 0$$

$$t = \infty \quad \text{lub} \quad t = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{\tilde{t} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}030} = 33{,}33 \text{ lat}}$$



$$\text{E}t = \text{E}\tau + \text{E}\tau = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = 66{,}67 \text{ lat}$$

Zadanie 10

Zmienna losowa ***x*** ma rozkład wykładniczy o gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, przy czym $\lambda = 0{,}6$. Należy wyznaczyć dystrybuantę $F(x)$ zmiennej ***x*** i narysować wykresy funkcji $f(x)$ oraz $F(x)$.

Zadanie 11

Zmienna losowa ***x*** ma rozkład wykładniczy o parametrze λ. Należy sporządzić wykresy gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej odpowiadające wartościom parametru $\lambda = 0{,}5$ i $\lambda = 0{,}2$. W odniesieniu do obu tych przypadków należy wyznaczyć wartości oczekiwane i mediany zmiennej ***x*** oraz zaznaczyć ich położenie na rysunku.

Zadanie 12

Na podstawie badań samolotu bezzałogowego stwierdzono, że czas ***t*** upływający do uszkodzenia pokładowego układu sterowania ma w przybliżeniu rozkład wykładniczy, a średnia wartość tego czasu wynosi 3000 h. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo poprawnego funkcjonowania układu w czasie misji trwającej $t_k = 10$ h.

Zadanie 13

Ustalono, że średnia trwałość żarówek w reflektorach wynosi 15000 h. Przyjmując, że czas zdatności tych żarówek ma rozkład wykładniczy, należy oszacować funkcję niezawodności pojedynczej żarówki w czasie 1000 h oraz czas, po którym funkcja ta zmniejszy się do wartości 0,900.

Zadanie 14

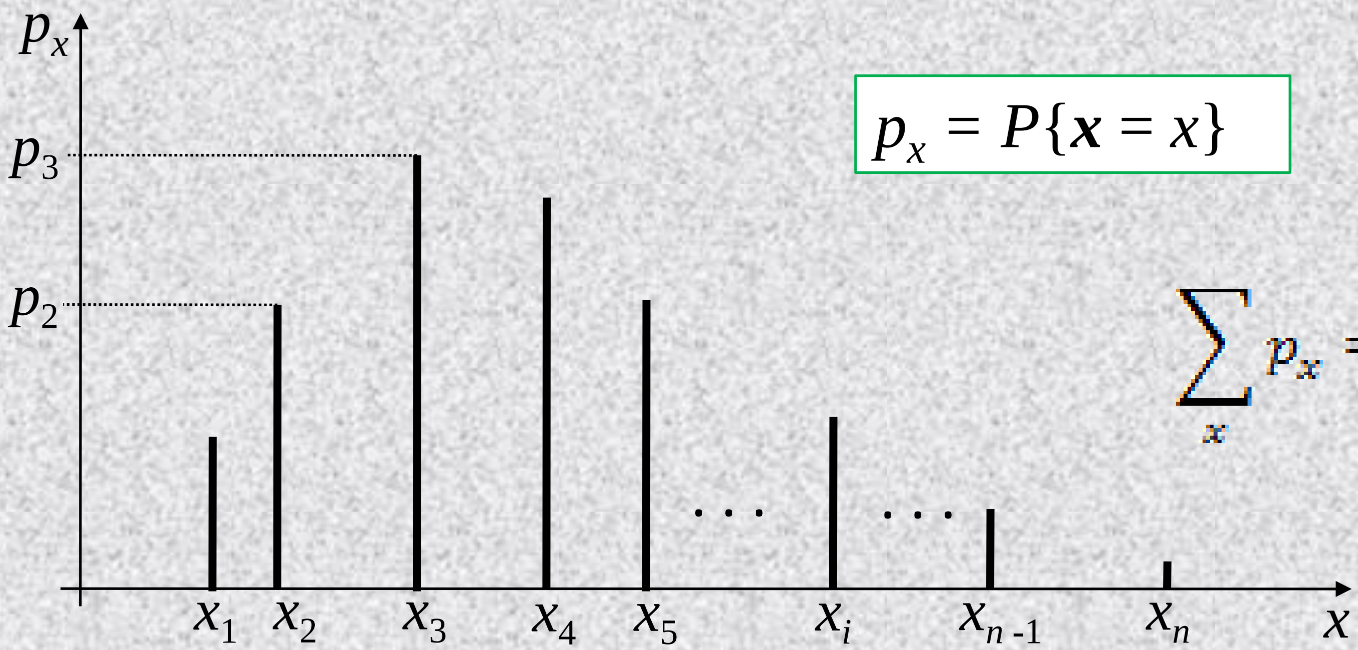
Przedstaw przybliżony przebieg wykresu gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ***x*** o rozkładzie wykładniczym, przy czym $\lambda = 0{,}125$ [1/rok]. Wyznacz wartość oczekiwaną E***x*** zmiennej ***x*** oraz prawdopodobieństwo $P\{\ \boldsymbol{x} > \mathrm{E}\boldsymbol{x}\}$, wiedząc, że dystrybuanta analizowanej zmiennej losowej wynosi $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Zaznacz na narysowanym wykresie położenie wartości oczekiwanej oraz przedstaw graficznie wielkość $Q(x)$ dla $x = \mathrm{E}\boldsymbol{x}$.

Zadanie 15

Podczas dokręcania śrub łączących kołnierz wylotu rury z pokrywą zamykającą ten wylot (rys. 2.47) wywoływany jest w każdej ze śrub naciąg wstępny i w efekcie średnie naprężenia w najbardziej wytężonym przekroju śruby wynoszące $\boldsymbol{\sigma}_{w}$. Granica wytrzymałości materiału śruby wynosi $\boldsymbol{R_m}$. Obie te wielkości można traktować jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym (wpływ ucięć jest niewielki). W wyniku włączenia rurociągu do eksploatacji pojawia się w nim czynnik o stałym, zdeterminowanym ciśnieniu, co powoduje wzrost naprężeń we wspomnianym przekroju śruby o σ_p. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo nieuszkodzenia śruby po pojawieniu się w rurociągu ciśnienia.

Dane: $\mathrm{E}\boldsymbol{R_m}$ = 750 MPa, $\mathrm{V}\boldsymbol{R_m}$ = 75^2 $(\mathrm{MPa})^2$, $\mathrm{E}\boldsymbol{\sigma}_{w}$ = 400 MPa, $\mathrm{V}\boldsymbol{\sigma}_{w}$ = 50^2 $(\mathrm{MPa})^2$, σ_p = 80 MPa.

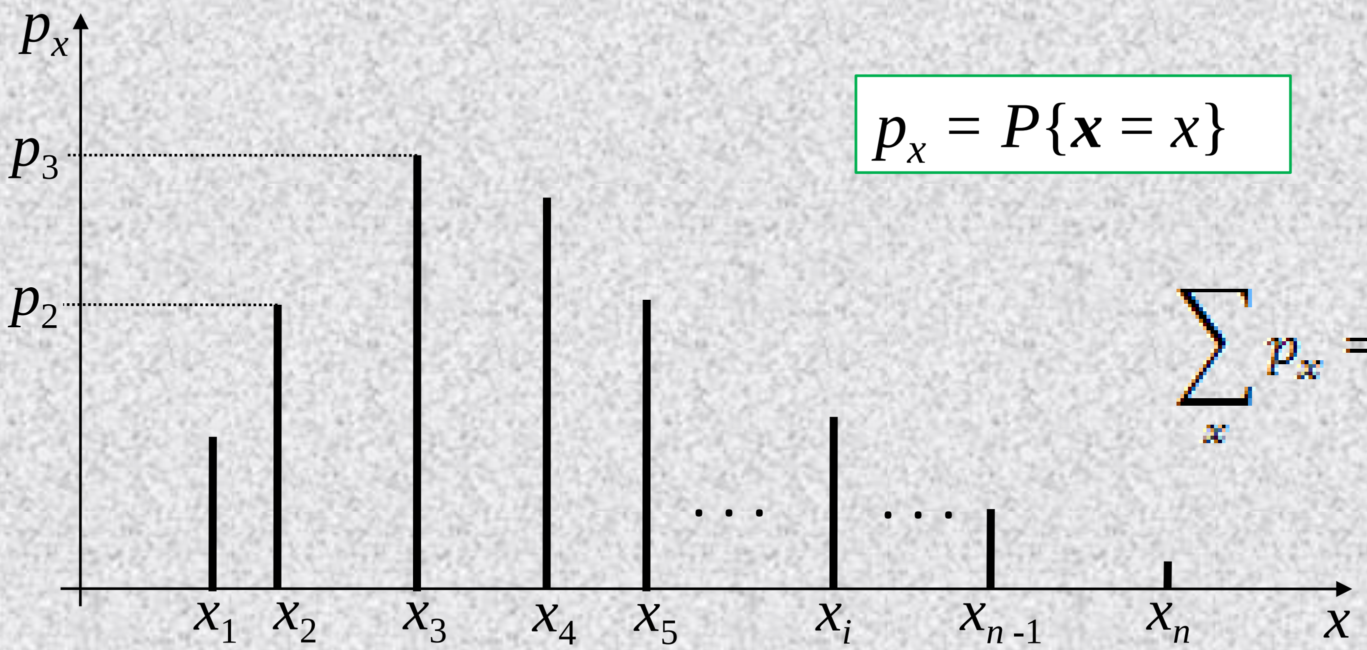
ZMIENNE LOSOWE DYSKRETNE (SKOKOWE)



$$\boxed{p_x = P\{\mathbf{x} = x\}}$$

$$\sum_x p_x = 1$$

ZMIENNE LOSOWE DYSKRETNE (SKOKOWE)



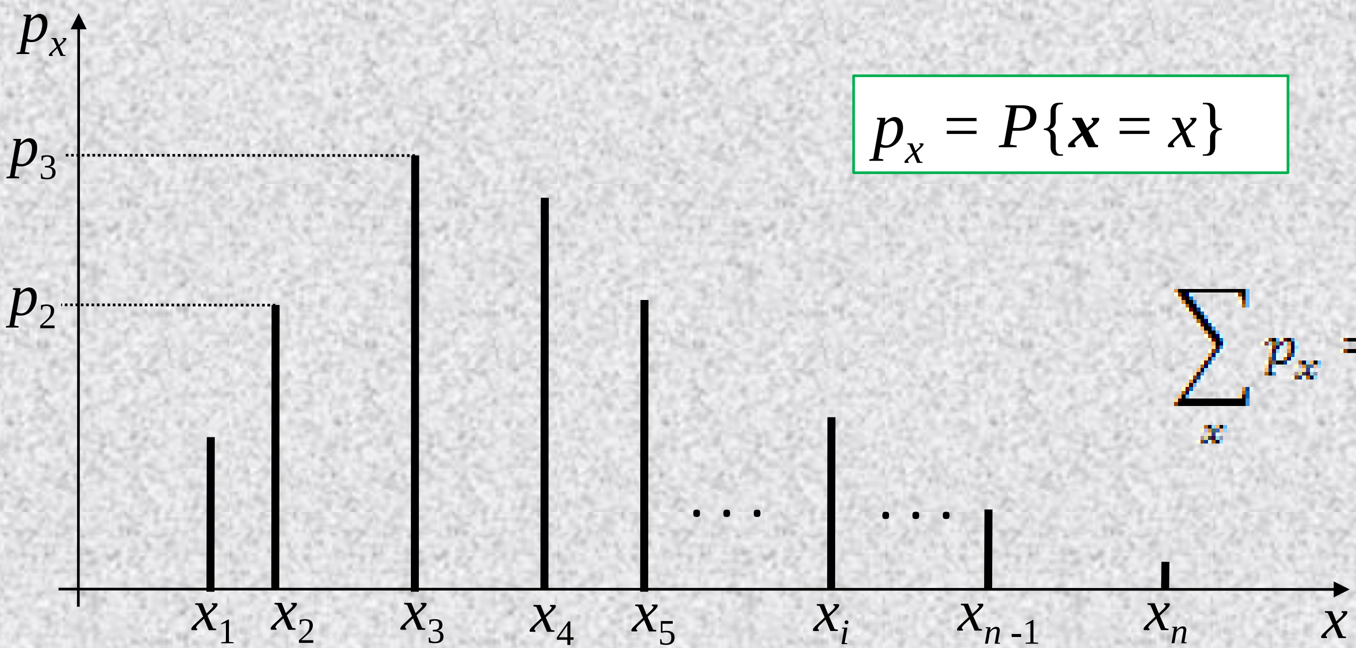
$$\boxed{p_x = P\{\mathbf{x} = x\}}$$

$$\sum_x p_x = 1$$

$$\boxed{\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \sum_x x p_x}$$

$$\left[\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x\right]$$

ZMIENNE LOSOWE DYSKRETNE (SKOKOWE)



$$p_x = P\{\mathbf{x} = x\}$$

$$\sum_x p_x = 1$$

$$\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \sum_x x p_x$$

$$\left[\mathrm{E}\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

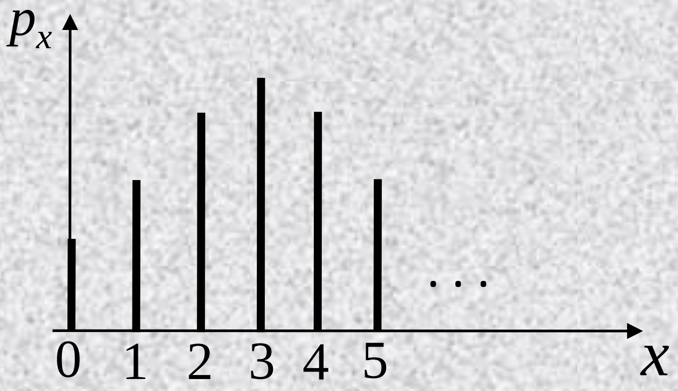
$$\vdots$$

$$\mathrm{V}\boldsymbol{x} = \sum_x (x - \mathrm{E}\boldsymbol{x})^2\, p_x$$

$$Q(x) = P\{\boldsymbol{x} \le x\} = \sum_{\xi \le x} p_\xi$$

Wybrane rozkłady zmiennych losowych dyskretnych

Rozkład dwumianowy zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$



$\boldsymbol{x}$ – liczba zajść określonego zdarzenia $\boldsymbol{A}$ w n niezależnych doświadczeniach ($x = 0, 1, 2, \ldots, n$),

q – prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $\boldsymbol{A}$ w jednym doświadczeniu (jednakowe w każdym doświadczeniu)

(np. orzeł-reszka)

Prawdopodobieństwo p_x zajścia zdarzenia $\boldsymbol{A}$ dokładnie x razy w n doświadczeniach:

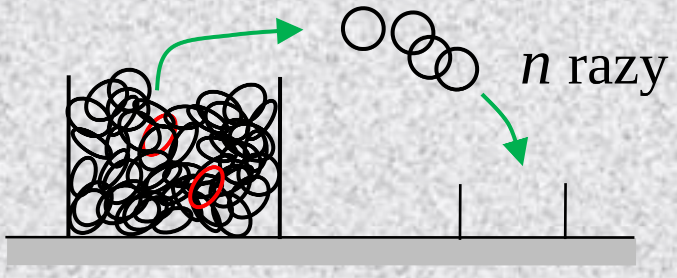
$$\boxed{p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Zadanie 15

Wiadomo, że wadliwość jednakowych uszczelek zapasowych trzymanych w pojemniku wynosi w = 2%. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród n = 6 uszczelek pobranych losowo z pojemnika nie znajdzie się uszczelka wadliwa.

Rozwiązanie



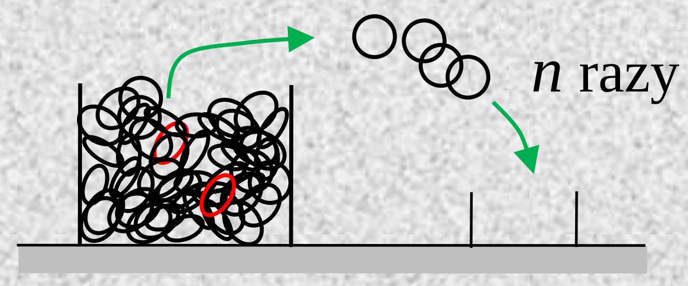
$p_k = P\{\boldsymbol{x} = x\}$,

przy czym $x = 0$

Zadanie 15

Wiadomo, że wadliwość jednakowych uszczelek zapasowych trzymanych w pojemniku wynosi w = 2%. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród n = 6 uszczelek pobranych losowo z pojemnika nie znajdzie się uszczelka wadliwa.

Rozwiązanie



$\boldsymbol{x}$ – liczba wylosowanych uszczelek wadliwych (zmienna losowa)

$p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\}$,

przy czym $x = 0$

$$p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}$$

$$P\{\boldsymbol{x} = 0\} = \frac{6!}{0!\,(6-0)!} 0{,}02^0 (1-0{,}02)^{6-0} = 0{,}886$$

Zadanie 16

Pewien lekkoatleta przekracza w rzucie młotem 80 metrów ze średnią częstością 60%. W czasie zawodów *Diamentowej Ligi* wykonuje 6 rzutów. Należy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby $\boldsymbol{x}$ wykonanych rzutów na odległość większą niż 80 m.

Zadanie 16

Pewien lekkoatleta przekracza w rzucie młotem 80 metrów ze średnią częstością 60%. W czasie zawodów *Diamentowej Ligi* wykonuje 6 rzutów. Należy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby $\boldsymbol{x}$ wykonanych rzutów na odległość większą niż 80 m.

Rozwiązanie

$p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\}, \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = x\} = \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}$

przy czym $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$

$n = 6; \quad q = 0{,}60$

Zadanie 16

Pewien lekkoatleta przekracza w rzucie młotem 80 metrów ze średnią częstością 60%. W czasie zawodów *Diamentowej Ligi* wykonuje 6 rzutów. Należy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby $\boldsymbol{x}$ wykonanych rzutów na odległość większą niż 80 m.

Rozwiązanie

$p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\}$, $\longrightarrow$ $P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}$

przy czym x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$n = 6; \quad q = 0{,}60$

$x = 0 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 0\} = \frac{6!}{0!\,(6-0)!} 0{,}60^0 (1-0{,}60)^{6-0} = 0{,}004$

$x = 1 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 1\} = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} 0{,}60^1 (1-0{,}60)^{6-1} = 0{,}037$

Zadanie 16

Pewien lekkoatleta przekracza w rzucie młotem 80 metrów ze średnią częstością 60%. W czasie zawodów *Diamentowej Ligi* wykonuje 6 rzutów. Należy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby $\boldsymbol{x}$ wykonanych rzutów na odległość większą niż 80 m.

Rozwiązanie

$p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\}$, $\longrightarrow$ $P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} q^x (1-q)^{n-x}$

przy czym x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

$n = 6$; $q = 0{,}60$

$x = 0 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 0\} = \frac{6!}{0!\,(6-0)!} 0{,}60^0 (1-0{,}60)^{6-0} = 0{,}004$

$x = 1 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 1\} = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} 0{,}60^1 (1-0{,}60)^{6-1} = 0{,}037$

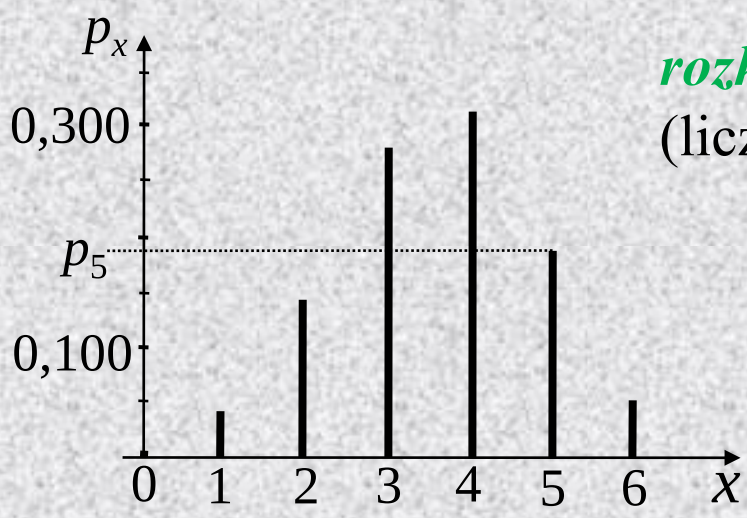
$x = 2 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 2\} = 0{,}138$

$x = 3 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 3\} = 0{,}276$

$x = 4 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 4\} = 0{,}311$

$x = 5 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 5\} = 0{,}187$

$x = 6 \longrightarrow P\{\boldsymbol{x} = 6\} = 0{,}047$



rozkład dwumianowy zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$ (liczby przekroczeń 80 m w rzucie młotem)

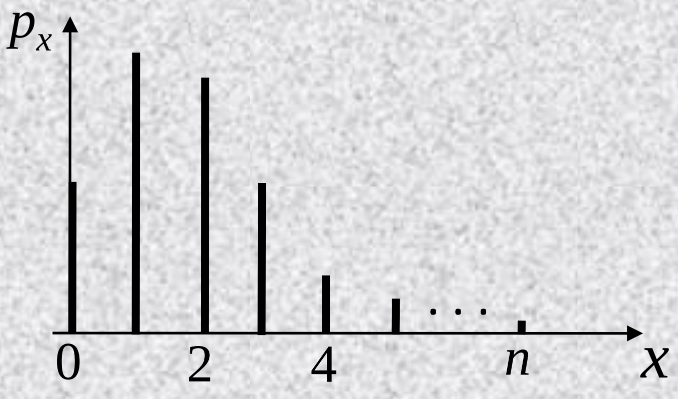
Zadanie 17

Opierając się na wynikach uzyskanych w rozwiązaniu poprzedniego zadania, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej trzech z sześciu rzutów młot wyląduje poza granicą 80 metrów.

Zadanie 18

Wykonywane są 4 rzuty monetą. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki 3 razy.

Rozkład Poissona zmiennej losowej $\boldsymbol{x}$



$\boldsymbol{x}$ – liczba zajść określonego zdarzenia $\boldsymbol{A}$ w n niezależnych doświadczeniach ($x = 0, 1, 2, \ldots, n$),

q – prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $\boldsymbol{A}$ w jednym doświadczeniu (jednakowe w każdym doświadczeniu)

Gdy n duże i q małe (praktycznie $n > 20$ i $q < 0{,}15$), rozkład dwumianowy można aproksymować rozkładem Poissona. Wówczas prawdopodobieństwo p_x zajścia zdarzenia $\boldsymbol{A}$ dokładnie x razy w n doświadczeniach:

$$\boxed{p_x = P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}}$$, gdzie $\lambda = nq$

$$\boxed{\lambda = \mathrm{E}\boldsymbol{x}}$$

Zadanie 19

Według danych armii pruskiej z początku XX wieku do wypadków śmiertelnych na skutek kopnięcia przez konia w oddziałach kawalerii dochodziło z częstością 6 razy w ciągu 10 lat. Należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby ***x*** wypadków śmiertelnych w armii pruskiej w ciągu 1 roku.

Zadanie 19

Według danych armii pruskiej z początku XX wieku do wypadków śmiertelnych na skutek kopnięcia przez konia w oddziałach kawalerii dochodziło z częstością 6 razy w ciągu 10 lat. Należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby ***x*** wypadków śmiertelnych w armii pruskiej w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

$$P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$\lambda = \mathrm{E}\boldsymbol{x} \approx 6/10$

Zadanie 19

Według danych armii pruskiej z początku XX wieku do wypadków śmiertelnych na skutek kopnięcia przez konia w oddziałach kawalerii dochodziło z częstością 6 razy w ciągu 10 lat. Należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby $\boldsymbol{x}$ wypadków śmiertelnych w armii pruskiej w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

$$P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$\lambda = \mathrm{E}\boldsymbol{x} \approx 6/10$

$x = 0$ $$P\{\boldsymbol{x} = 0\} = \frac{0{,}6^0}{0!} e^{-0{,}6} = 0{,}548$$

$x = 1$ $$P\{\boldsymbol{x} = 1\} = \frac{0{,}6^1}{1!} e^{-0{,}6} = 0{,}329$$

Zadanie 19

Według danych armii pruskiej z początku XX wieku do wypadków śmiertelnych na skutek kopnięcia przez konia w oddziałach kawalerii dochodziło z częstością 6 razy w ciągu 10 lat. Należy wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa liczby ***x*** wypadków śmiertelnych w armii pruskiej w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

$$P\{\boldsymbol{x} = x\} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad \lambda = \mathrm{E}\boldsymbol{x} \approx 6/10$$

$x = 0$ $\quad P\{\boldsymbol{x} = 0\} = \frac{0{,}6^0}{0!} e^{-0{,}6} = 0{,}548$

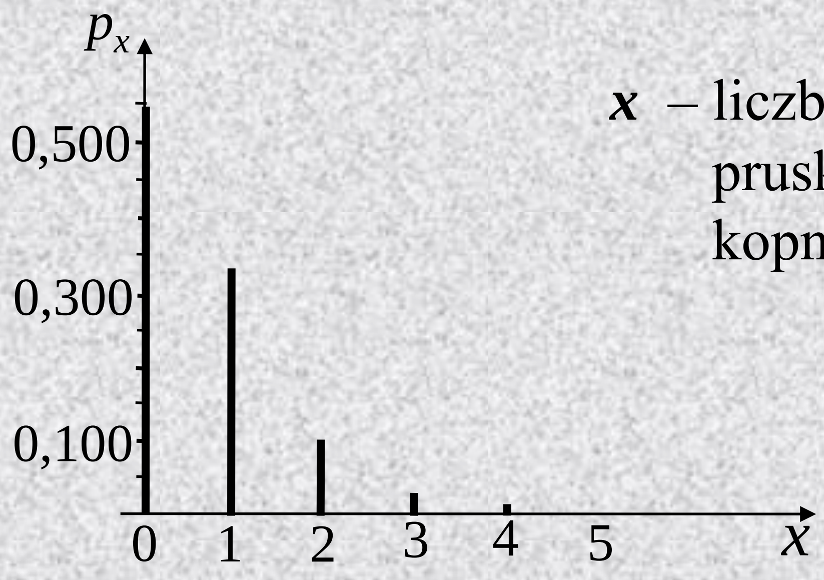
$x = 1$ $\quad P\{\boldsymbol{x} = 1\} = \frac{0{,}6^1}{1!} e^{-0{,}6} = 0{,}329$

$x = 2$ $\quad P\{\boldsymbol{x} = 2\} = 0{,}099$

$x = 3$ $\quad P\{\boldsymbol{x} = 3\} = 0{,}020$

$x = 4$ $\quad P\{\boldsymbol{x} = 4\} = 0{,}003$

$x = 5$ $\quad P\{\boldsymbol{x} = 5\} = 0{,}0003$



x – liczba wypadków śmiertelnych w armii pruskiej w ciągu 1 roku na skutek kopnięcia przez konia

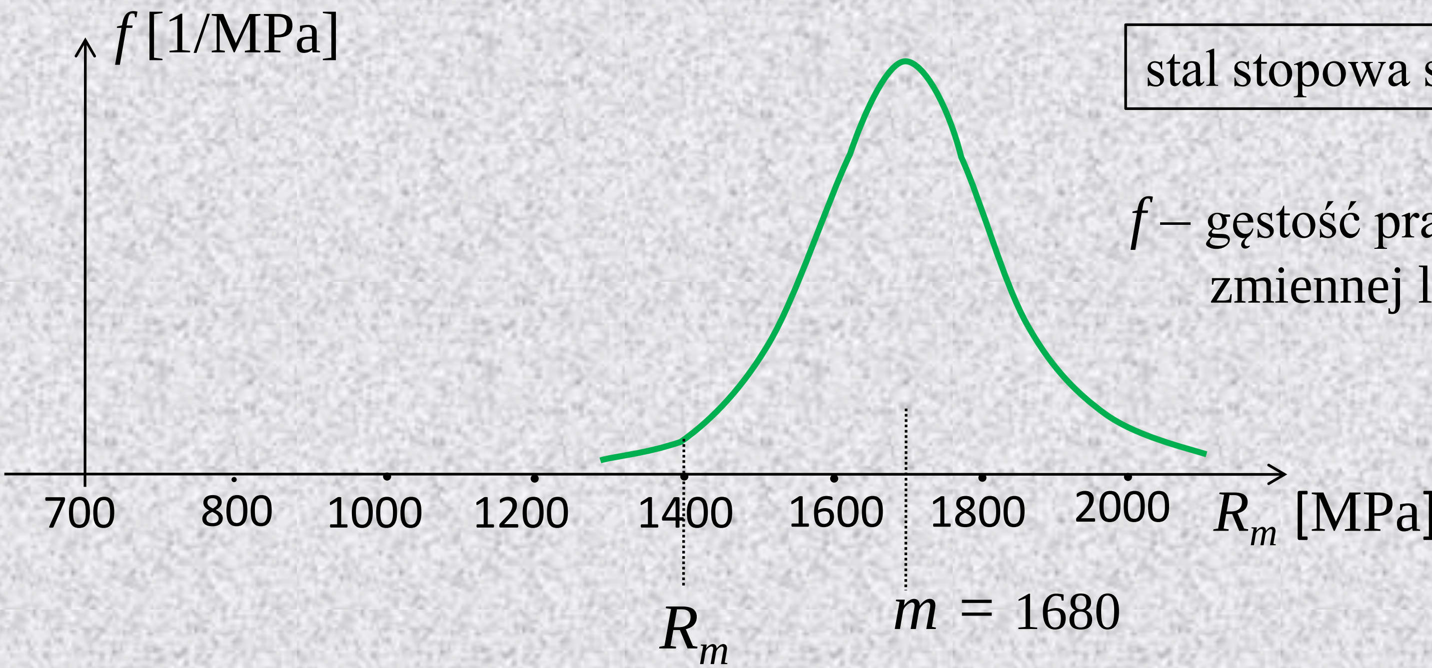
Zadanie 20

W pewnym dużym przedsiębiorstwie (z dużą liczbą stanowisk pracy) dochodzi do wypadków przy pracy średnio raz na 5 lat. Stosując rozkład Poissona, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zajścia w ciągu najbliższego roku w tym przedsiębiorstwie co najmniej dwóch wypadków.

ZDARZENIA LOSOWE

zdarzenia

- zdarzenia w przeszłości
  - *realizacje* ***zdarzeń losowych***
- **zdarzenia w przyszłości**
  - ***zdarzenia losowe***



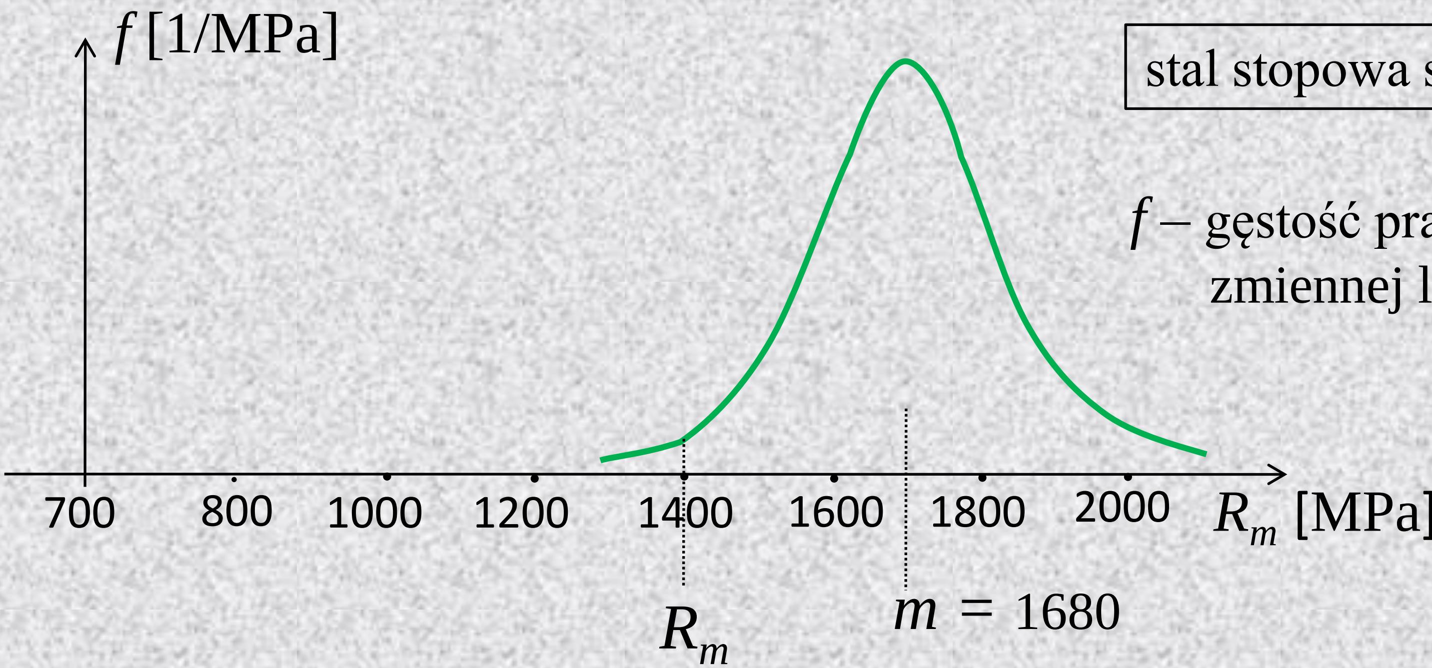
stal stopowa sprężynowa

f – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{R_m} \leq 1400 \\ 1500 < \boldsymbol{R_m} \leq 1600 \end{array}\right\} \text{– przykłady zdarzeń losowych}$$

Inne przykłady:

- $\boldsymbol{x} \geq 5$ ($\boldsymbol{x}$ – liczba wypadków w firmie w ciągu roku)
- $\boldsymbol{T} < 2$ lata ($\boldsymbol{T}$ - trwałość urządzenia)
- $\boldsymbol{A}$ – popełnienie błędu przez pracownika
- $\boldsymbol{A}$ – uszkodzenie urządzenia
- $\boldsymbol{A}$ – wygrana w grze losowej



stal stopowa sprężynowa VDC

f – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\boldsymbol{R_m}$

$\boldsymbol{R_m} \leq 1400$
$1500 < \boldsymbol{R_m} \leq 1600$
– przykłady zdarzeń losowych

$\boldsymbol{R_m}$ **,** $\boldsymbol{x}$ **,** $\boldsymbol{T}$ – zmienne losowe

Inne przykłady:

- $\boldsymbol{x} \geq 5$ ($\boldsymbol{x}$ – liczba wypadków w firmie w ciągu roku)
- $\boldsymbol{T} < 2$ lata ($\boldsymbol{T}$ - trwałość urządzenia)
- $\boldsymbol{A}$ – popełnienie błędu przez pracownika
- $\boldsymbol{A}$ – uszkodzenie urządzenia
- $\boldsymbol{A}$ – wygrana w grze losowej

- Zajście zdarzenia losowego nie jest pewne.
- Miarą możliwości zajścia zdarzenia losowego ***A*** jest wielkość matematyczna ⇨ ***prawdopodobieństwo***

$$P\{\boldsymbol{A}\} = \frac{N_A}{N}$$

N – liczba wszystkich jednakowo możliwych zdarzeń (wyników pomiarów, doświadczeń, obserwacji,…), czyli liczebność *populacji generalnej*

N_A – liczba zajść zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia ***A***

- Zajście zdarzenia losowego nie jest pewne.
- Miarą możliwości zajścia zdarzenia losowego ***A*** jest wielkość matematyczna $\Rightarrow$ ***prawdopodobieństwo***

$$\boxed{P\{\boldsymbol{A}\} = \frac{N_A}{N}}$$

N – liczba <u>wszystkich</u> jednakowo możliwych zdarzeń (wyników pomiarów, doświadczeń, obserwacji,…), czyli liczebność *populacji generalnej*

N_A – liczba zajść zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia ***A***

<u>Zadanie 21</u>

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik.

<u>Rozwiązanie</u>

$$\left.\begin{aligned} N &= 52 \\ N_A &= 13 \end{aligned}\right\} \quad \boldsymbol{A} \text{ – wyciągnięcie karty pik} \quad \Rightarrow \quad P\{\boldsymbol{A}\} = \frac{13}{52} = 0{,}25$$

Zadanie 22

Wśród 1000 jednakowych uszczelek zapasowych trzymanych w pojemniku 20 sztuk jest wadliwych. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo pobrana z pojemnika jedna uszczelka jest wadliwa.

Rozwiązanie

$$\left.\begin{array}{l} N = 1000 \\ N_A = 20 \end{array}\right\} \; \boldsymbol{A} \text{ – pobranie wadliwej uszczelki} \;\Rightarrow\; P\{\boldsymbol{A}\} = \frac{20}{1000} = 0{,}02$$

Jeśli liczebność całej populacji jest nieograniczona, to

$$\boxed{P\{\boldsymbol{A}\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}}$$

N – liczebność *próbki losowej* (statystycznej)

$\Downarrow$

Ważniejsze działania na zdarzeniach

- $\boldsymbol{A}$ i $\bar{\boldsymbol{A}}$ - zdarzenie i zdarzenie przeciwne względem $\boldsymbol{A}$, np. orzeł i reszka, popełnienie i niepopełnienie błędu przez pracownika.

- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.

- Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, np. $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$

$$P\{\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} + P\{\boldsymbol{B}\} - P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\}$$

Zadanie 23

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik lub asa.

Zadanie 23

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik lub asa.

Rozwiązanie

zdarzenie $\boldsymbol{A}$ **lub** zdarzenie $\boldsymbol{B}$ ⇒ $\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\}$

Zadanie 23

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik lub asa.

Rozwiązanie

zdarzenie ***A*** ***lub*** zdarzenie ***B*** $\Rightarrow$ $\{A \cup B\}$

$$P\{A\} = \frac{13}{52}$$

$$P\{B\} = \frac{4}{52}$$

Zadanie 23

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik lub asa.

Rozwiązanie

zdarzenie $\boldsymbol{A}$ ***lub*** zdarzenie $\boldsymbol{B}$ $\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\}$

$$P\{\boldsymbol{A}\} = \frac{13}{52}$$

$$P\{\boldsymbol{B}\} = \frac{4}{52}$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} + P\{\boldsymbol{B}\} - P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\}$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = \frac{1}{52}$$

Zadanie 23

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się kartę pik lub asa.

Rozwiązanie

zdarzenie ***A*** ***lub*** zdarzenie ***B*** $\Rightarrow$ $\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\}$

$$P\{\boldsymbol{A}\} = \frac{13}{52}$$

$$P\{\boldsymbol{B}\} = \frac{4}{52}$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} + P\{\boldsymbol{B}\} - P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \approx 0{,}31$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = \frac{1}{52}$$

- Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, np. $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\}$$

$P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\}$ – prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia $\boldsymbol{B}$, przy założeniu, że zaszło zdarzenie $\boldsymbol{A}$

Zadanie 24

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się asa pik.

Rozwiązanie

$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = ?$

zdarzenie $\boldsymbol{A}$ – wyciągnięcie karty w kolorze pik

zdarzenie $\boldsymbol{B}$ – wyciągnięta karta jest asem

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} = \frac{13}{52} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$$

- Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, np. ***A*** i ***B***

$$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\}\cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\}$$

$P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\}$ – prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia ***B***, przy założeniu, że zaszło zdarzenie ***A***

Zadanie 24

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania jednej karty z talii 52 kart otrzyma się asa pik.

Rozwiązanie

$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = ?$

zdarzenie ***A*** – wyciągnięcie karty w kolorze pik

zdarzenie ***B*** – wyciągnięta karta jest asem

$$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = \frac{N_{A\cap B}}{N} = \frac{1}{52}$$

$$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\}\cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} = \frac{13}{52}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{52}$$

Jeśli $P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} = P\{\boldsymbol{B}\}$, to zdarzenia $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ są niezależne. Wówczas

$$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\}\cdot P\{\boldsymbol{B}\}$$

Zadanie 25

Należy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w rezultacie wylosowania z dwóch talii kart (po 52 karty każda) otrzyma się dwie karty w kolorze pik.

Rozwiązanie

zdarzenie $\boldsymbol{A}$ – wyciągnięcie karty w kolorze pik z 1.talii
zdarzenie $\boldsymbol{B}$ – wyciągnięcie karty w kolorze pik z 2.talii
$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = ?$

$$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\}\cdot P\{\boldsymbol{B}\} = \frac{13}{52}\cdot\frac{13}{52} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Zadanie 26

Podczas przerwy śniadaniowej operator koparki może być narażony na dwa zdarzenia niepożądane:

A - upadek wskutek poślizgnięcia się lub potknięcia,

B - potrącenie przez przejeżdżający pojazd.

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z nich w ciągu 1 roku, oszacowane w sposób ekspercki, wynoszą odpowiednio: $q_A = 50 \cdot 10^{-6}$, $q_B = 12 \cdot 10^{-6}$.

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas przerw śniadaniowych w ciągu 1 roku.

Zadanie 26

Podczas przerwy śniadaniowej operator koparki może być narażony na dwa zdarzenia niepożądane:

A - upadek wskutek pośliźgnięcia się lub potknięcia,

B - potrącenie przez przejeżdżający pojazd.

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z nich w ciągu 1 roku, oszacowane w sposób ekspercki, wynoszą odpowiednio: $q_A = 50 \cdot 10^{-6}$, $q_B = 12 \cdot 10^{-6}$.
Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas przerw śniadaniowych w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

$$P\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} + P\{\boldsymbol{B}\} - P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\}$$

Zadanie 26

Podczas przerwy śniadaniowej operator koparki może być narażony na dwa zdarzenia niepożądane:

A - upadek wskutek poślizgnięcia się lub potknięcia,

B - potrącenie przez przejeżdżający pojazd.

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z nich w ciągu 1 roku, oszacowane w sposób ekspercki, wynoszą odpowiednio: $q_A = 50 \cdot 10^{-6}$, $q_B = 12 \cdot 10^{-6}$.
Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo uległnięcia wypadkowi przez pracownika podczas przerw śniadaniowych w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

$$P\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} + P\{\boldsymbol{B}\} - P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\}$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} \approx P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}\} =$$
$$= q_A\, q_B = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 0{,}0006 \cdot 10^{-6}$$

Zadanie 26

Podczas przerwy śniadaniowej operator koparki może być narażony na dwa zdarzenia niepożądane:

A - upadek wskutek poślizgnięcia się lub potknięcia,

B - potrącenie przez przejeżdżający pojazd.

Prawdopodobieństwa zajścia każdego z nich w ciągu 1 roku, oszacowane w sposób ekspercki, wynoszą odpowiednio: $q_A = 50 \cdot 10^{-6}$, $q_B = 12 \cdot 10^{-6}$.

Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas przerw śniadaniowych w ciągu 1 roku.

Rozwiązanie

$$P\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} + P\{\boldsymbol{B}\} - P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\}$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} \approx P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}\} =$$
$$= q_A\, q_B = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 0{,}0006 \cdot 10^{-6}$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} = 50 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6} - 0{,}0006 = 62 \cdot 10^{-6}$$

Zadanie 27

Na podstawie danych statystycznych należy oszacować prawdopodobieństwo spowodowania śmierci pieszego przez samochód osobowy w ciągu 1 roku w Polsce przy założeniu prędkości najechania wynoszącej 60 km/h.

Zadanie 27

Na podstawie danych statystycznych należy oszacować prawdopodobieństwo spowodowania śmierci pieszego przez samochód osobowy w ciągu 1 roku w Polsce przy założeniu prędkości najechania wynoszącej 60 km/h.

Rozwiązanie

$\boldsymbol{A}$ – najechanie na pieszego przez samochód osobowy

$\boldsymbol{B}$ – utrata życia przez pieszego

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = ?$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\}$$

Zadanie 27

Na podstawie danych statystycznych należy oszacować prawdopodobieństwo spowodowania śmierci pieszego przez samochód osobowy w ciągu 1 roku w Polsce przy założeniu prędkości najechania wynoszącej 60 km/h.

Rozwiązanie

$\boldsymbol{A}$ – najechanie na pieszego przez samochód osobowy

$\boldsymbol{B}$ – utrata życia przez pieszego

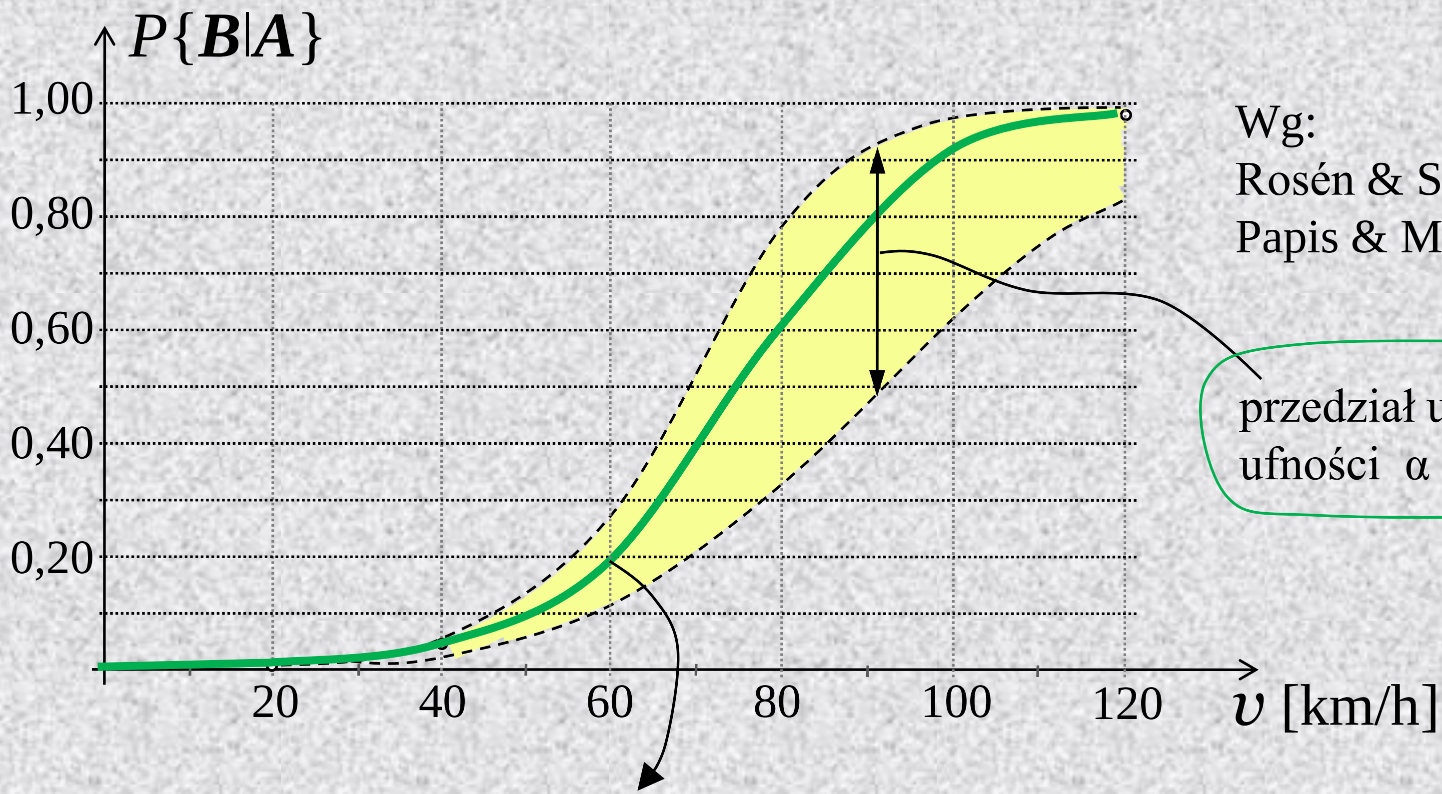
$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = ?$$

$$P\{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\} \cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\}$$

Według danych KG Policji dotyczących wypadków drogowych w Polsce w 2018 r.

$$P\{\boldsymbol{A}\} \equiv Q(1) = \frac{\text{liczba najechań w ciągu roku}}{\text{liczba samochodów osobowych}} =$$

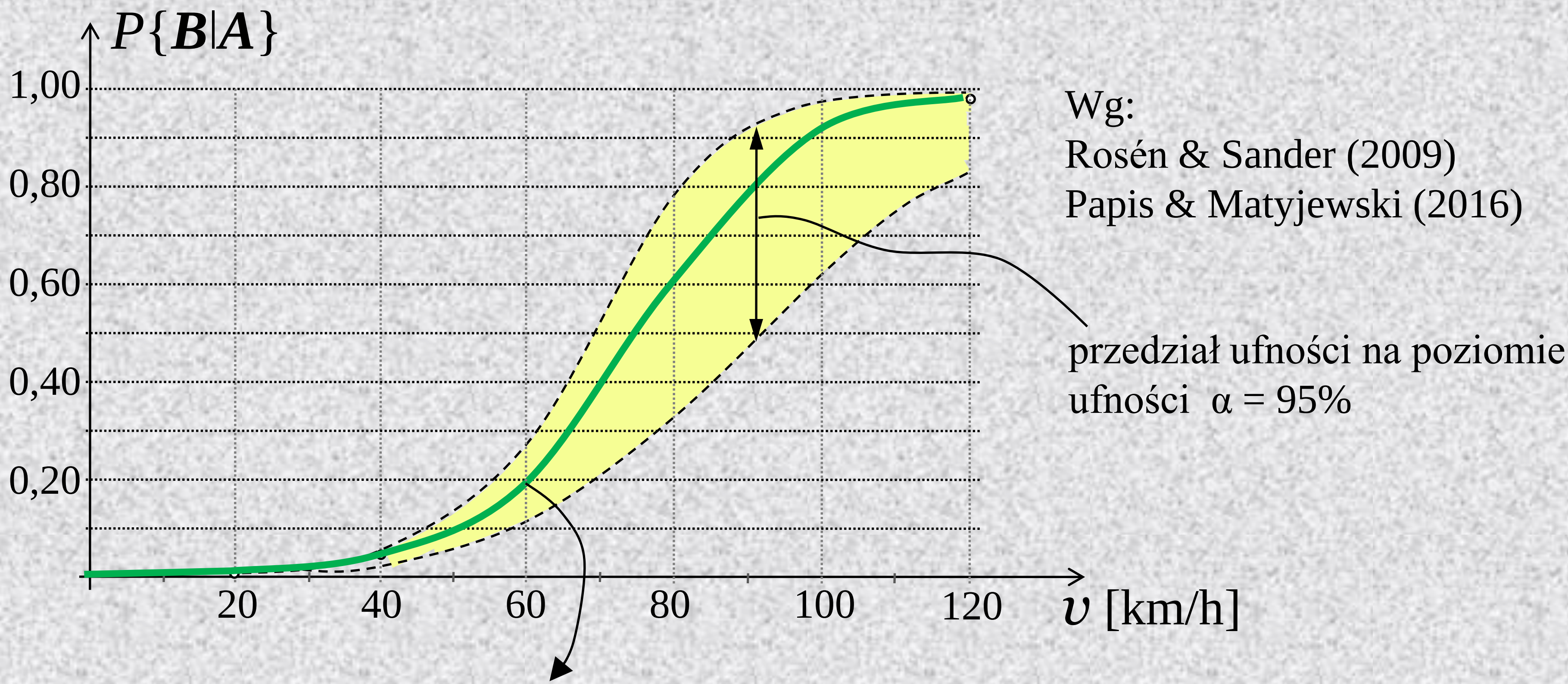
$$= 180 \cdot 10^{-6} [1/\text{rok}]$$



Wg:
Rosén & Sander (2009)
Papis & Matyjewski (2016)

przedział ufności na poziomie ufności α = 95%

$$P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} \approx 0{,}20$$



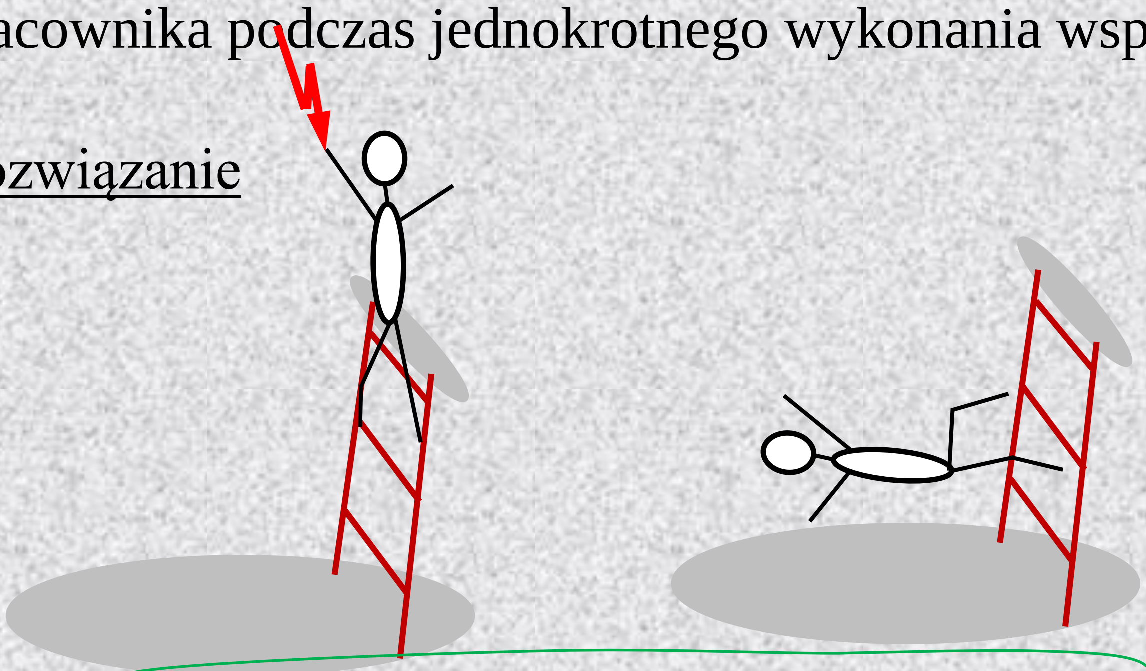
$$P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} \approx 0{,}20$$

$$P\{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\} = P\{\boldsymbol{A}\}\cdot P\{\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}\} = 180\cdot10^{-6}\cdot 0{,}20 = 36\cdot 10^{-6}\ [1/\text{rok}]$$

Zadanie 28

Pracownik wchodzi na trzymetrową drabinę w celu naprawy oświetlenia. W trakcie wymiany świetlówki może ulec wypadkowi, albo wskutek porażenia prądem (zdarzenie ***A***) albo wskutek upadku z drabiny (zdarzenie ***B***). Porażenie prądem podczas jednokrotnej wymiany świetlówki może zajść z prawdopodobieństwem $q_A = 0{,}03 \cdot 10^{-6}$, a upadek z drabiny – z prawdopodobieństwem $q_B = 0{,}20 \cdot 10^{-6}$. Zakładając, że zdarzenia te są niezależne, należy obliczyć prawdopodobieństwo ulegnięcia wypadkowi przez pracownika podczas jednokrotnego wykonania wspomnianej czynności.

Rozwiązanie



zdarzenie ***A*** lub zdarzenie ***B*** $\Rightarrow$ $\{A \cup B\}$

Zadanie 28

Podczas modelowania ryzyka zawodowego dla określonego stanowiska pracy zespół ekspertów wyróżnił dwa zdarzenia niepożądane, które mogą się pojawić przy wykonywaniu przez pracownika określonej czynności, i oszacował, że prawdopodobieństwo zajścia w ciągu roku pierwszego z tych zdarzeń wynosi $2 \cdot 10^{-3}$, a drugiego z nich $5 \cdot 10^{-3}$. Eksperci oszacowali także, że prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika wskutek zajścia pierwszego zdarzenia wynosi 0,50, a wskutek zajścia drugiego – 0,10. Stosując wzory na prawdopodobieństwo sumy i prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, wyznacz prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika w ciągu 1 roku wykonywania tej czynności.

Zadanie 29

W wyniku identyfikacji zagrożeń na stanowisku pracy uznano, że jednym ze zdarzeń, na które narażony jest pracownik, jest potrącenie pracownika przez przejeżdżający wózek elektryczny. Metodami eksperckimi oszacowano, że prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia w ciągu 1 roku wynosi 0,015, a prawdopodobieństwo utraty życia w rezultacie potrącenia jest równe 0,001. Stosując wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń, wyznacz prawdopodobieństwo utraty życia przez pracownika w ciągu 1 roku w związku z możliwością zajścia potrącenia.

ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

Statystycznym odpowiednikiem prawdopodobieństwa, np. prawdopodobieństwa $P\{\boldsymbol{A}\}$, – ***częstość zdarzeń*** *w*

$$w = \frac{N_A}{N}$$

N – liczba jednakowo możliwych zdarzeń w *próbce losowej* (liczebność próbki losowej)

N_A – liczba zajść zdarzenia ***A*** (spośród *N*)

w – to ***estymator prawdopodobieństwa*** (są też estymatory, czyli odpowiedniki statystyczne, innych wielkości probabilistycznych, np. wartości oczekiwanej zmiennej losowej, odchylenia standardowego zmiennej losowej)

ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

Statystycznym odpowiednikiem prawdopodobieństwa, np. prawdopodobieństwa $P\{\boldsymbol{A}\}$, – ***częstość zdarzeń*** *w*

$$w = \frac{N_A}{N}$$

N – liczba jednakowo możliwych zdarzeń w *próbce losowej* (liczebność próbki losowej)

N_A – liczba zajść zdarzenia $\boldsymbol{A}$ (spośród N)

Przykłady

1. $\boldsymbol{A} \equiv (\boldsymbol{H} > 180) \longrightarrow$ $N = 1100$ – liczebność grupy mężczyzn (*próbki losowej*)

$N_A = 420$ – liczba mężczyzn w tej grupie o wzroście $H > 180$

$$w = \frac{N_A}{N} = \frac{420}{1100} = 0{,}382 \longrightarrow P\{\boldsymbol{A}\} \approx 0{,}382$$

Inne przykłady

2. $\boldsymbol{A} \equiv (1500 < \boldsymbol{R_m} \leq 1600)$ $\longrightarrow$ N – liczba zbadanych próbek materiału

N_A – liczba próbek, których granica wytrzymałości znalazła się w rozważanym przedziale

3. $\boldsymbol{A} \equiv (\boldsymbol{x} \geq 5)$ w ciągu 1 roku

N – liczba lat obserwacji

N_A – liczba lat, w których wypadków było $x \geq 5$

4. $\boldsymbol{A} \equiv$ utrata życia przez pracownika na określonym stanowisku pracy w ciągu 1 roku

N – liczba obserwowanych stanowisk pracy należących do tej samej populacji

N_A – liczba wypadków śmiertelnych, jakie zaszły na tych stanowiskach w ciągu 1 roku

Interpretacje wartości prawdopodobieństwa i częstości

- Prawdopodobieństwo utraty życia przez rybaka w ciągu 1 roku

$P\{\mathbf{utrata\ życia}(1)\} = 2000 \cdot 10^{-6}$

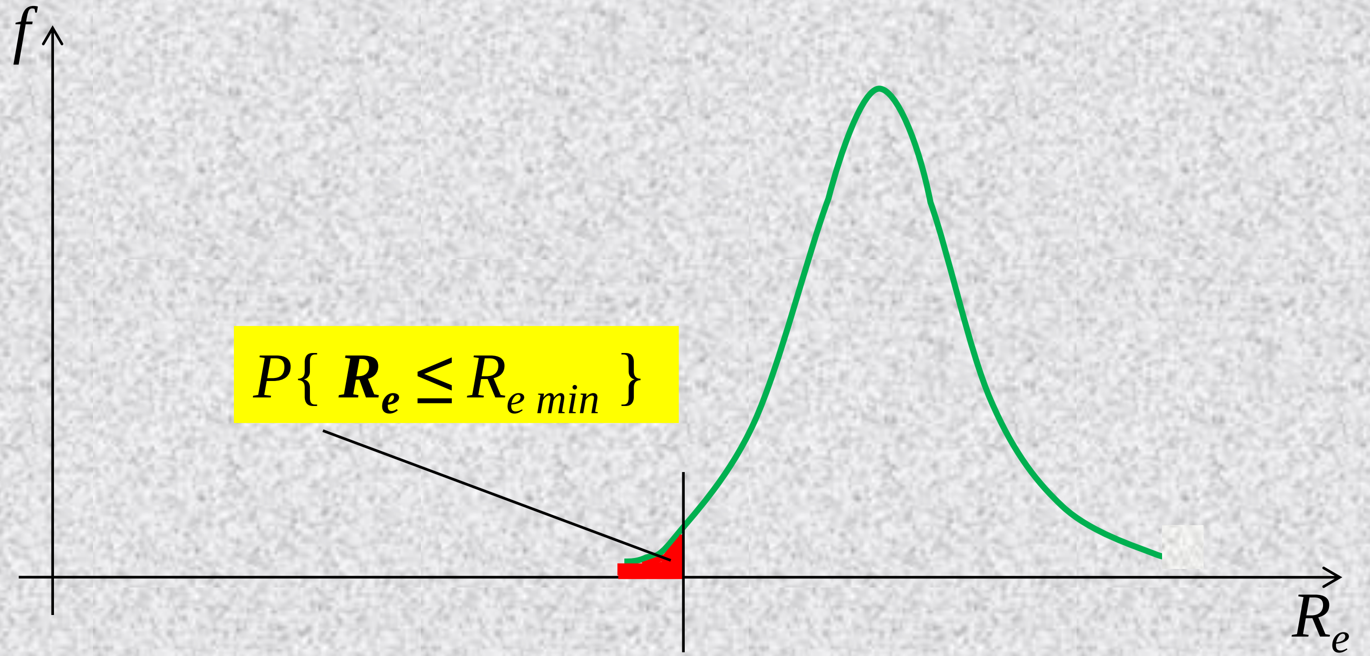
$$2000 \cdot 10^{-6} = \frac{2000}{1000000} = \frac{2}{1000} = 0{,}002$$

Interpretacje

- Inne przykłady
  - Prawdopodobieństwo zajścia wypadku w pewnej małej firmie w ciągu 1 roku wynosi $P\{\boldsymbol{A}\} = 0{,}5$.

Wartość oczekiwana (średnia) liczby wypadków w ciągu 5 lat szacowana przy użyciu wzoru na częstość

$$N_A = Nw \approx N \cdot P\{\boldsymbol{A}\} = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$$



$P\{ \boldsymbol{R_e} \leq R_{e\,min} \} \equiv Q \approx 0{,}02$

Liczba N_A spośród N =1000 sztuk populacji jednakowych elementów urządzenia mających granicę plastyczności o wartości mniejszej niż podawana $R_{e\,min}$ lub jej równej wynosi

$$N_A \approx N \cdot P\{\boldsymbol{A}\} = N \cdot Q = 1000 \cdot 0{,}02 = 20.$$

Zadanie 30

W roku 2010 zaszło w Stanach Zjednoczonych 8,6 mln wypadków przy pracy (zdarzenia kończącego się obrażeniami dowolnego rozmiaru), spowodowanych błędami pracowników. Zanotowana w tym samym roku liczba osób pracujących w USA wyniosła 145 mln. Należy oszacować średnie prawdopodobieństwo $Q(1)$ popełnienia błędu przez pracownika w USA w ciągu 1 roku.

Zadanie 31

Liczba wypadków drogowych w latach 2013−2017 zaszłych na terenie USA, zanotowana przez Bureau of Transportation Statistics, wyniosła 32 mln. Całkowita liczba pojazdów wynosiła w tym czasie około 265 mln. Należy oszacować na podstawie tych danych średnie prawdopodobieństwo zajścia wypadku drogowego w USA w przeliczeniu na 1 pojazd w ciągu 1 roku.

Zadanie 32

Liczba wypadków drogowych w latach 2009−2013 zaszłych na terenie USA, zanotowana przez Bureau of Transportation Statistics, wyniosła 27,5 mln. Sumaryczny dystans przebyty przez nie wyniósł 24250 mld km. Należy oszacować na podstawie tych danych średnie prawdopodobieństwo zajścia wypadku drogowego w USA w przeliczeniu na 1 tysiąc km dystansu przebytego przez pojazd.

Zadanie 33

Na podstawie danych statystycznych rejestrowanych przez 2 lata użytkowania 300 egzemplarzy pewnego urządzenia lotniczego zanotowano 7 uszkodzeń. Należy wyznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzenia pojedynczego egzemplarza urządzenia w ciągu 1 roku jego funkcjonowania.

Zadanie 34

W reprezentatywnej próbce losowej pracowników w USA, liczącej N = 1 mln osób, zanotowano w ciągu 1 roku b = 57 000 wypadków przy pracy (zdarzenia kończącego się obrażeniami dowolnego rozmiaru), spowodowanych błędami pracowników. Należy wyznaczyć średnie prawdopodobieństwo $Q(1)$ popełnienia takiego błędu przez pracownika w USA w ciągu 1 roku.

Zadanie 35

W próbce losowej o liczebności N = 200 jednakowych uszczelek produkowanych masowo przez firmę znaleziono podczas kontroli jakości N_A = 3 uszczelki niespełniające wymagań. Należy oszacować wadliwość populacji produkowanych uszczelek.

Estymacja punktowa i estymacja przedziałowa

$$P\{A\} \approx w = \frac{N_A}{N}$$

estymacja punktowa

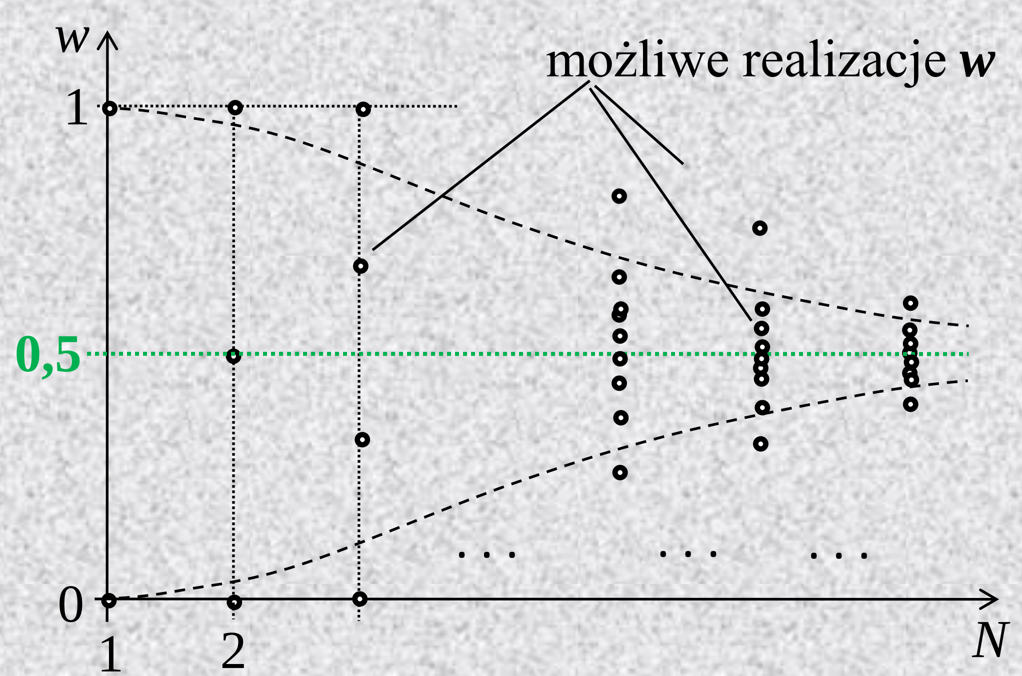
Estymacja punktowa – nie jest określona dokładność oszacowania.

Im liczebność próbki statystycznej jest większa (większa liczba obserwacji, prób, doświadczeń, …), tym większa dokładność oszacowania wartości prawdopodobieństwa przy użyciu wyrażenia na częstość *w*

A ≡ wyrzucenie reszki w 1 rzucie monetą

N – liczba rzutów monetą

N_A – liczba rzutów zakończonych wyrzuceniem reszki



Estymacja przedziałowa pozwala na określenie dokładności oszacowań.

Opiera się ona na założeniu, że szacowana statystycznie częstość ***w*** jest zmienną losową, a uzyskiwany wynik z próbki losowej jest jej realizacją. Nieznana wartość estymatora określanej wielkości probabilistycznej, np. prawdopodobieństwa $P\{\boldsymbol{A}\} \equiv p$, jest zawarta w przedziale $[w_d, w_g]$ – takim, że

$$P\{w_d \leq \boldsymbol{p} \leq w_g\} = \beta$$

zwykle
$\beta = 0{,}90$ lub $0{,}95$

poziom ufności ***przedział ufności***

Jeśli N duże, to rozkład estymatora $\boldsymbol{w}$ można aproksymować rozkładem normalnym. Wówczas

$$w_d = w - y_{\alpha}\sqrt{\frac{1}{N}w(1-w)}$$

$$w_g = w + y_{\alpha}\sqrt{\frac{1}{N}w(1-w)}$$

y_{α} – kwantyl rzędu $\alpha = (1 + \beta)/2$ standaryzowanego rozkładu normalnego (określany na podstawie tablic).

Np. dla $\beta = 0{,}95$ $\quad y_{\alpha} = 1{,}960$

$\beta = 0{,}90$ $\quad y_{\alpha} = 1{,}645$

(w – zwykle określane na podstawie badań jednej próbki losowej)

Jeśli N małe, to rozkład estymatora $\boldsymbol{w}$ jest zwykle aproksymowany rozkładem F- Snedecora $\longrightarrow$ inne wzory na w_d i w_g (literatura)

Zadanie 36

Badaniom eksploatacyjnym trwałości urządzenia poddano próbkę losową urządzeń o liczebności N = 50, a następnie drugą próbkę tych samych urządzeń o liczebności N = 500. W czasie t ich użytkowania uległo uszkodzeniom w pierwszej próbce b = 5, a w drugiej próbce b = 50 egzemplarzy urządzenia. Należy wyznaczyć wartości estymatora prawdopodobieństwa nieuszkodzenia urządzenia dla tego okresu na podstawie wyników badań pierwszej próbki i na podstawie wyników drugiej próbki, a także granice przedziałów ufności tej wielkości na poziomie ufności $\beta = 0{,}95$ w obu przypadkach badań.

Zadanie 36

Badaniom eksploatacyjnym trwałości urządzenia poddano próbkę losową urządzeń o liczebności $N = 50$, a następnie drugą próbkę tych samych urządzeń o liczebności $N = 500$. W czasie t ich użytkowania uległo uszkodzeniom w pierwszej próbce $b = 5$, a w drugiej próbce $b = 50$ egzemplarzy urządzenia. Należy wyznaczyć wartości estymatora prawdopodobieństwa nieuszkodzenia urządzenia dla tego okresu na podstawie wyników badań pierwszej próbki i na podstawie wyników drugiej próbki, a także granice przedziałów ufności tej wielkości na poziomie ufności $\alpha = 0{,}95$ w obu przypadkach badań.

Rozwiązanie

$\boldsymbol{A}$ – nieuszkodzenie urządzenia w czasie t

$$P\{\boldsymbol{A}\} \approx w = \frac{N-b}{N} = \frac{50-5}{50} = 0{,}90$$ 1.próbka losowa

$$P\{\boldsymbol{A}\} \approx w = \frac{N-b}{N} = \frac{500-50}{500} = 0{,}90$$ 2.próbka losowa

Granice przedziału ufności w przypadku 1.próbki losowej

$$w_d = w - y_{\propto}\sqrt{\frac{1}{N}w(1-w)} = 0{,}90 - 1{,}960\sqrt{\frac{1}{50}0{,}90(1-0{,}90)}$$

$$= 0{,}90 - 0{,}083 = 0{,}817$$

$$w_g = 0{,}90 + 0{,}083 = 0{,}983$$

Granice przedziału ufności w przypadku 1.próbki losowej

$$w_d = w - y_{\propto}\sqrt{\frac{1}{N}w(1-w)} = 0{,}90 - 1{,}960\sqrt{\frac{1}{50}0{,}90(1-0{,}90)}$$
$$= 0{,}90 - 0{,}083 = 0{,}817$$

$$w_g = 0{,}90 + 0{,}083 = 0{,}983$$

Granice przedziału ufności w przypadku 2.próbki losowej

$$w_d = w - y_{\propto}\sqrt{\frac{1}{N}w(1-w)} = 0{,}90 - 1{,}960\sqrt{\frac{1}{500}0{,}90(1-0{,}90)}$$
$$= 0{,}90 - 0{,}026 = 0{,}874$$

$$w_g = 0{,}90 + 0{,}026 = 0{,}926$$

Trzykrotne zmniejszenie szerokości przedziału ufności: $2 \cdot 0{,}083 \longrightarrow 2 \cdot 0{,}026$

Zadanie 37

Na próbce losowej wyborców o liczebności 1000 przeprowadzono badania poparcia poszczególnych partii. Udział w wyborach zadeklarowało 700 osób. Okazało się, że partię XYZ poparło 45 wyborców. Należy oszacować częstość w poparcia tej partii przez wyborców i dokładność tego oszacowania.

Zadanie 33

Na próbce losowej wyborców o liczebności 1000 przeprowadzono badania poparcia poszczególnych partii. Udział w wyborach zadeklarowało 700 osób. Okazało się, że partię XYZ poparło 45 wyborców. Należy oszacować częstość *w* poparcia tej partii przez wyborców i dokładność tego oszacowania.

Rozwiązanie

$$w = \frac{N_{XYZ}}{N} = \frac{45}{700} \approx 0{,}064 = 6{,}4\ \%$$

Zadanie 33

Na próbce losowej wyborców o liczebności 1000 przeprowadzono badania poparcia poszczególnych partii. Udział w wyborach zadeklarowało 700 osób. Okazało się, że partię XYZ poparło 45 wyborców. Należy oszacować częstość *w* poparcia tej partii przez wyborców i dokładność tego oszacowania.

Rozwiązanie

$$w = \frac{N_{XYZ}}{N} = \frac{45}{700} \approx 0{,}064 = 6{,}4\ \%$$

Poziom ufności $\longrightarrow$ $\beta = 0{,}95$ $\longrightarrow$ $y_\alpha = 1{,}960$

$$w_d = w - y_\propto \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)} = 0{,}064 - 0{,}018 = 0{,}046$$

$$w_g = 0{,}064 + 0{,}018 = 0{,}082$$

Zadanie 33

Na próbce losowej wyborców o liczebności 1000 przeprowadzono badania poparcia poszczególnych partii. Udział w wyborach zadeklarowało 700 osób. Okazało się, że partię XYZ poparło 45 wyborców. Należy oszacować częstość *w* poparcia tej partii przez wyborców i dokładność tego oszacowania.

Rozwiązanie

$$w = \frac{N_{XYZ}}{N} = \frac{45}{700} \approx 0{,}064 = 6{,}4\ \%$$

Poziom ufności $\longrightarrow$ $\beta = 0{,}95$ $\longrightarrow$ $y_\alpha = 1{,}960$

$$w_d = w - y_\alpha \sqrt{\frac{1}{N} w(1-w)} = 0{,}064 - 0{,}018 = 0{,}046$$

$$w_g = 0{,}064 + 0{,}018 = 0{,}082$$

Faktyczna częstość poparcia partii XYZ mieści się w przedziale (4,6÷8,2) % z prawdopodobieństwem $\beta = 0{,}95$

Zadanie 38

Na próbce losowej wyborców o liczebności 1000 przeprowadzono badania poparcia poszczególnych partii. Udział w wyborach zadeklarowało 700 osób. Okazało się, że partię XYZ poparło 260 wyborców. Należy oszacować częstość *w* poparcia tej partii przez wyborców i dokładność tego oszacowania.

Zadanie 39

Na próbce losowej jednakowych łożysk tocznych przeprowadzono badania doświadczalne zawodności łożyska w czasie L = 200 [mln obr]. Każde z N = 500 łożysk pracowało w czasie tych badań w takich samych warunkach (jednakowe: obciążenie, prędkość obrotowa, temperatura, smarowanie, chłodzenie). W rezultacie badań okazało się, że 2 łożyska z próbki losowej uległy uszkodzeniu, nie osiągając założonej liczby L obrotów. Należy oszacować granice przedziału ufności na poziomie α = 0,90 zawodności populacji (generalnej) badanych łożysk.

Zadanie 40

W reprezentatywnej próbce losowej stanowisk pracy w USA o liczebności N = 1 mln zanotowano w 2010 r. 60 tysięcy wypadków przy pracy (zdarzeń kończących się obrażeniami dowolnego rozmiaru), spowodowanych błędami pracowników. Należy wyznaczyć średnie prawdopodobieństwo $Q(1)$ popełnienia błędu przez pracownika w USA w ciągu 1 roku oraz granice przedziału ufności na poziomie $\beta = 0,95$ tego prawdopodobieństwa.

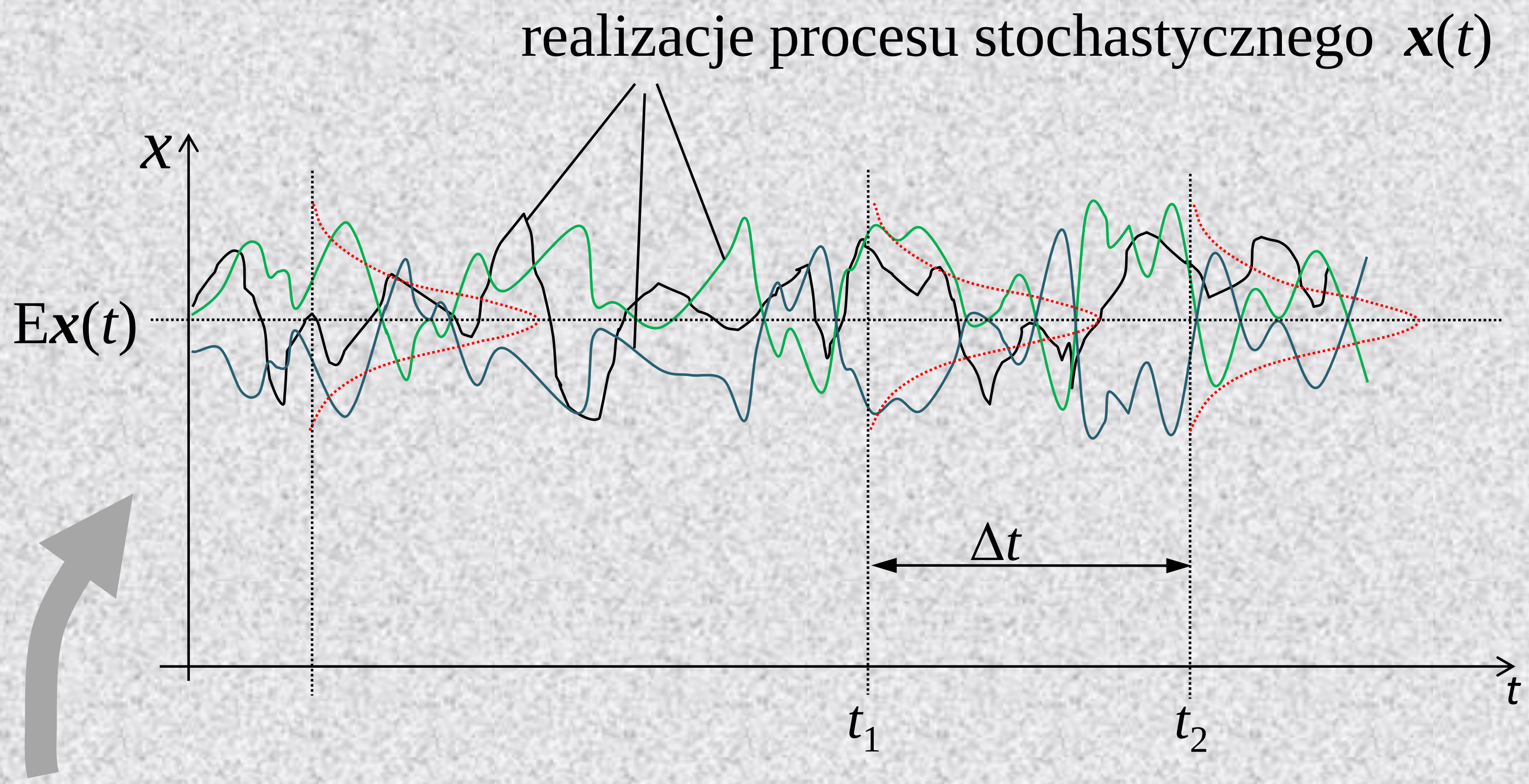
Zadanie 41

Na średnicę wewnętrzną d = 50 mm pierścienia wewnętrznego łożyska tocznego narzucone są odchyłki wymiarowe: dolna EI = – 15 μm i górna ES = 0. Zapewnienie wymiaru o takich cechach odbywa się na obrabiarce sterowanej numerycznie poprzez odpowiednie ustawienie parametrów jej pracy. W rezultacie kontroli wymiarów dokonanej na próbce statystycznej pierścieni o liczebności N = 200 stwierdzono, że 11 z nich ma wymiary niemieszczące się w polu tolerancji. Należy oszacować wadliwość pierścieni wytwarzanych przy tak ustawionych parametrach obrabiarki oraz dokładność tego oszacowania.

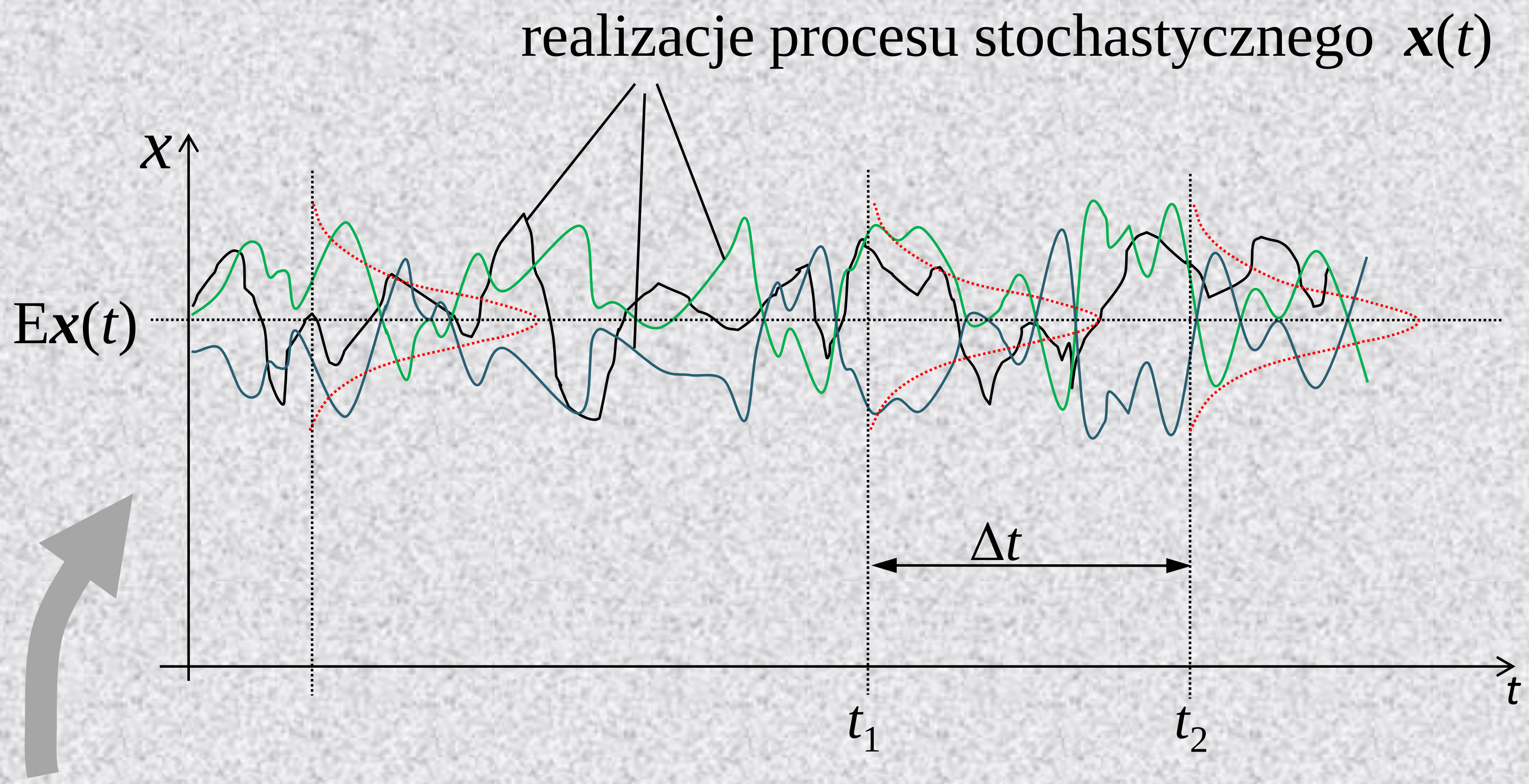
INFORMACJA O PROCESACH STOCHASTYCZNYCH (losowych)

x - naprężenia gnące oś samochodu
- obciążenie elementów łyżki koparki
- natężenie hałasu na stanowisku pracy w ciągu dnia
- stężenie pyłu w powietrzu na stanowisku pracy
- stężenie metanu w kopalni

itd.



$f\,[x(t)] = f\,(x) = \text{const}$ → proces stacjonarny w węższym sensie

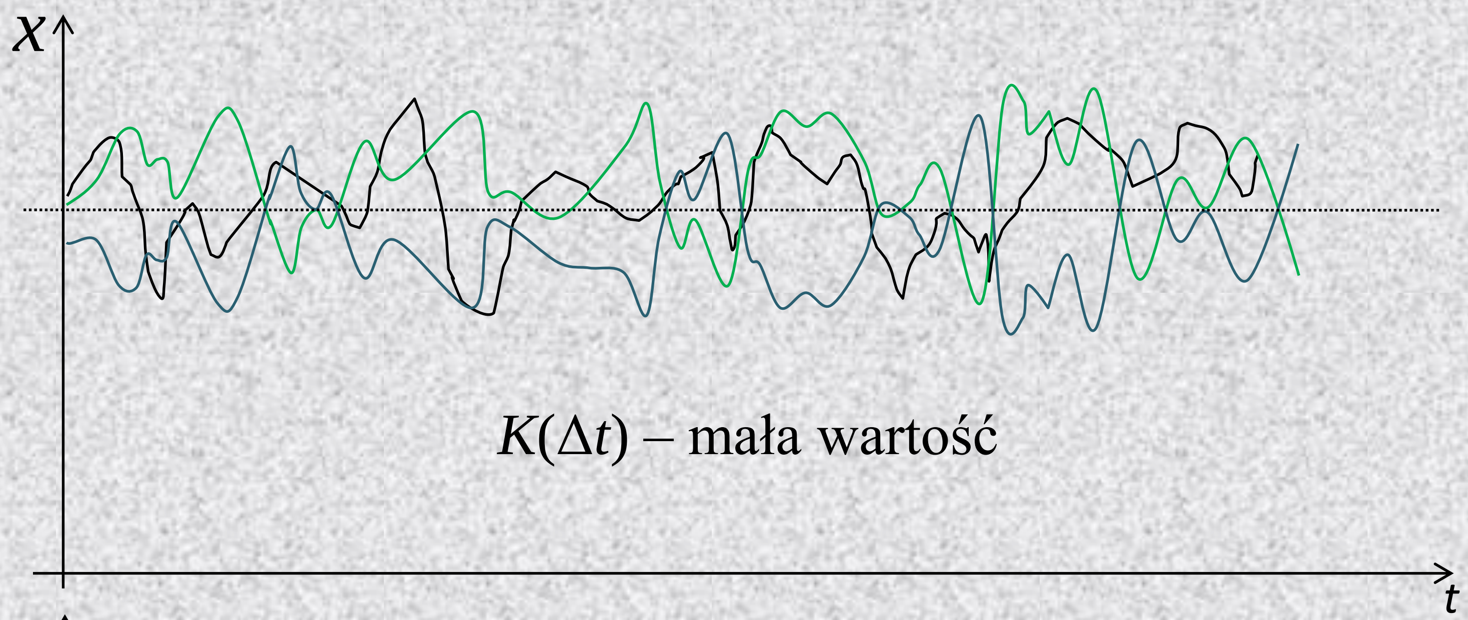


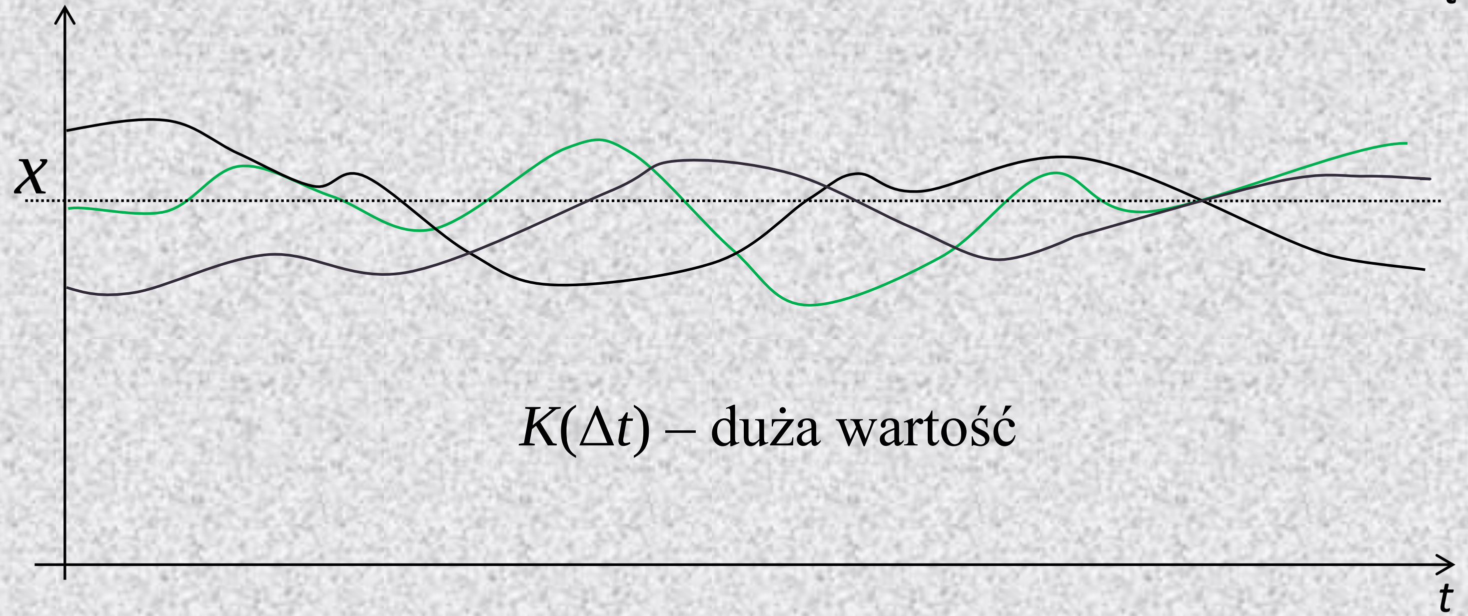
$f\,[x(t)] = f\,(x) = \text{const}$ → **proces stacjonarny w węższym sensie**

mówi o sile zależności między wartościami x w różnych chwilach t

$f\,[x(t)] = f\,(x) = \text{const}$ oraz
funkcja korelacyjna K
nie zależy od t, a jedynie od Δt

→ **proces stacjonarny w szerszym sensie**





Przykład dwóch procesów stochastycznych stacjonarnych w szerszym sensie o różnych wartościach funkcji korelacyjnej $K(\Delta t)$